Geometría y Polihedros

MLG521

Cristóbal Rojas

Deparento de Ciencias de de la Ingeniería
Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad Andrés Bello
Co-dictado con Pamela Álvarez

MLG521

Ejemplo gráfico

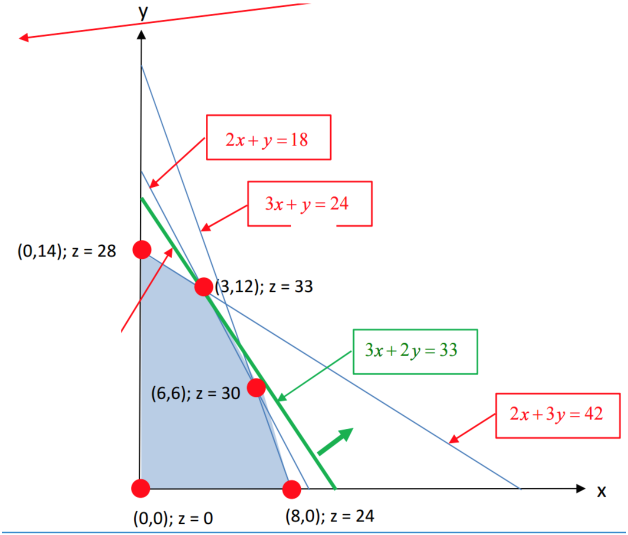
Si bien la resolución no es práctica pues sólo puede aplicarse con 2 o 3 variables, es útil para ilustrar la intuición geométrica de las ideas involucradas en el algoritmo SIMPLEX general.

Ejemplo:

$$Max\ z = 3x + 2y; \tag{1}$$

$$\begin{aligned} s.a. \qquad 2x + y &\leq 18 \\ 2x + 3y &\leq 42 \\ 3x + y &\leq 24 \\ x \geq 0, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolución Gráfica



Programación Lineal

Vamos a resolver problemas de la siguiente forma:

Problema Lineal

$$Min\ c^t x \tag{2}$$

$$s.a\ Ax = b \tag{3}$$

$$x \geq 0 \tag{4}$$

Como llevamos a forma standard?

- Máximos y Mínimos $\rightarrow$ usamos que :

$$Max \quad z = -Min \quad -z$$

- Variables no restringidas :

$$x_i = x_i' - x_i'' \quad \text{con} \quad x_i', x_i'' \geq 0$$

Cambio de desigualdad a igualdad: variables de holgura

Una restricción de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n \leq b$$

podemos sustituirla por

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n + x_{n+1} = b$$

donde x_{n+1} es una variable de holgura que cumple $x_{n+1} \geq 0$.

Análogamente

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n \geq b$$

la sustituimos por

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n - x_{n+1} + b \quad \text{con} \quad x_{n+1} \geq 0.$$

Definiciones Básicas

Poliedro

Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un poliedro si $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ para alguna matrix $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^m$.

Hiperplanos

Sea $a \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}$, decimos que:

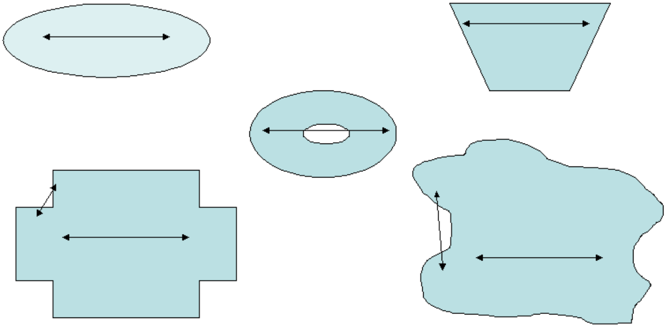
1. $S := \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x = d\}$ es un hiperplano.
2. $S := \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x \leq d\}$ es un semi-espacio.

- Note que un hiperplano es la frontera de un semi-espacio.
- Un poliedro es la intersección finita de semiespacios.

Conjuntos Convexos

Definición

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si para todo par de puntos $x, y \in S$ se tiene que el punto $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$ para todo $\lambda \in [0,1]$.



Combinación convexa

Combinación convexa

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es una combinación convexa de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tal que:

- $x = \sum_1^n \lambda_i x_i$.
- $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Envoltura convexa

Envoltura convexa

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

- La envolvente convexa ded S es el conjunto de todas las combinaciones convexas de un número finito de puntos de S.
- $conv_hull(S) := \{y \in \mathbb{R}^n : \exists k \in \mathbb{N}, \{x_i\}_{i=1}^k \subseteq S, \{\lambda_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathbb{R}_+$, tal que, $\sum \lambda_i = 1, y = \sum \lambda_i x_i\}$
- La envoltura conveza es el conjunto convexo más pequeño que contiene a S.
- Un conjunto es convexo sí y sólo si es igual a su envoltura convexa.

Poliedros y convexidad

- La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.
- Los semi-espacios son conjuntos convexos.
- Los poliedros son conjuntos convexos.

S

ea $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro. Diremos que es acotado si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo punto $x \in P$ se tiene que $x_i \leq M$.

Puntos extremos

Punto extremo

Sea $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro. $x \in P$ es un punto extremo de P si no es combinación convexa de puntos de P.

Un poliedro acotado se puede definir como el envoltura convexa de sus puntos extremos.

Poliedros no acotados

Rayo

Un rayo generado por la dirección $d \in \mathbb{R}^d$ es el conjunto:

$$A = \{x : x = \alpha d, \alpha \geq 0\}$$

Semirecta

Una semirecta que pasa por $y \in \mathbb{R}^n$ y tiene dirección d es el conjunto es el conjunto:

$$B = \{x : x = y + \alpha d, \alpha \geq 0\}$$

poliedros no acotados

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro no acotado. Entonces el conjunto de puntos extremos es finito y el conjunto de direcciones extremas es finito y no vacio.

Un punto x pertenece al poliedro si y sólo si puede ser representado como una combinación convexa de los puntos extremos y una combinación lineal no negativa de sus direcciones extremas.

Programación Lineal

Forma standard de un PL:

$$Min\ c^t x \tag{5}$$

$$s.a\ Ax = b \tag{6}$$

$$x \geq 0 \tag{7}$$

¿Todos los problemas se pueden llevar a uno de estos?

PL

- ¿Qué relación existe entre el poliedro y la función objetivo?
- ¿Qué relación existe entre los puntos extremos del poliedro y la función objetivo?
- Un PL puede tener las siguientes soluciones:
    - Solución óptima única.
    - Solución óptima múltiple.
    - Sin solución
- ¿Ideas para un algoritmo?

Simplex Geometrico

El algoritmo SIMPLEX establece criterios para pasar de un extremo dado a otro adyacente de modo de asegurar que el valor de la función objetivo no disminuye.