Programación Entera

MLG521

Profesores: Cristóbal Rojas
Pamela Alvarez

Departamento de Ciencias de de la Ingeniería
Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad Andrés Bello
Curso dictado en conjunto con Pamela Álvarez

MLG521

Ejemplo 2: Método B&B para un PPLE Mixta

Sea el siguiente PPLE Mixta:

$$
\begin{array}{lrcl}
\textit{Minimizar} & z = 3x_1 + 2x_2 & & \\
\textit{sujeto a} & x_1 - 2x_2 + x_3 & = & \frac{5}{2} \\
 & 2x_1 + x_2 \quad + x_4 & = & \frac{3}{2} \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \\
 & x_2, x_3 & \in & \mathbf{N}
\end{array}
$$

Se trata de obtener su solución mediante el método de B&B.

Solución: Método B&B para un PPLE Mixta

Paso 1: Iniciación

1.1 La cota superior inicial es $+\infty$ y la inferior $-\infty$.

1.2 El problema relajado, denominado P0, es el siguiente:

$$
\begin{array}{lrcl}
\textit{Minimizar} & z = 3x_1 + 2x_2 & & \\
\textit{sujeto a} & x_1 - 2x_2 + x_3 & = & \frac{5}{2} \\
 & 2x_1 + x_2 \quad + x_4 & = & \frac{3}{2} \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

<u>*Solución*</u>: $z = 0$ para el punto (x_1=0, x_2=0, x_3=2.5, x_4=1.5)

1.2c Esta solución no satisface las condiciones de integralidad ($x_3 \notin \mathrm{N}$).
Así, el valor de la función objetivo se emplea para actualizar la cota inferior de $-\infty$ a 0

Solución: Método B&B para un PPLE Mixta (continuación 1)

Paso 2: Bifurcación

2.1 La variable que ha de ser entera x_3, mediante bifurcación da lugar a los dos problemas siguientes:

Problema P1

$$\begin{array}{lll} \textit{Minimizar} & z = & 3x_1 + 2x_2 \\ \textit{sujeto a} & & x_1 - 2x_2 + x_3 = \tfrac{5}{2} \\ & & 2x_1 + x_2 + x_4 = \tfrac{3}{2} \\ & & x_3 \leq 2 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Problema P2

$$\begin{array}{lll} \textit{Minimizar} & z = & 3x_1 + 2x_2 \\ \textit{sujeto a} & & x_1 - 2x_2 + x_3 = \tfrac{5}{2} \\ & & 2x_1 + x_2 + x_4 = \tfrac{3}{2} \\ & & x_3 \geq 3 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq \mathbf{0} \end{array}$$

2.2 Estos problemas se colocan en la lista de problemas a procesar.

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P1

Solución: z = 1.5 para el punto (x_1=0.5, x_2=0, x_3=2, x_4=0.5)

Paso 4: Acotación

4.1 Puesto que la solución obtenida satisface las condiciones de integralidad (x_2, $x_3 \in \mathrm{N}$), y que el valor de la función objetivo (z=1.5) es menor que el valor actual de la cota superior, ésta se actualiza de ∞ a 1.5 (la solución óptima está por tanto entre 0 y 1.5), y el minimizador encontrado se almacena como mejor candidato a minimizador del problema original.

Paso 5: Poda

5.3 Puesto que la solución actual satisface las condiciones de integralidad (para x_2 y x_3), la rama se poda y se continua con el paso 3.

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P2. *Solución*: z = 0.5 para el punto (x_1=0, x_2=0.25, x_3=3, x_4=1.25)

Solución: Método B&B para un PPLE Mixta (continuación 2)

Paso 4: Acotación

4.2 Puesto que esta solución no satisface las condiciones de integralidad ($x_2 \notin \mathrm{N}$) y el valor correspondiente de la función objetivo (0.5) está entre las cotas interior y superior, la cota inferior se actualiza de 0 a 0.5 (la solución óptima está por tanto entre 0.5 y 1.5).

A continuación se procede a bifurcar sobre la variable x_2, lo que da lugar a los dos problemas siguientes:

Problema P3

$$
\begin{array}{llrl}
\textit{Minimizar} & z = 3x_1 + 2x_2 & & \\
\textit{sujeto a} & x_1 - 2x_2 + x_3 & = & \frac{5}{2} \\
 & 2x_1 + x_2 \quad + x_4 & = & \frac{3}{2} \\
 & x_3 & \geq & 3 \\
 & x_2 & \leq & \mathbf{0} \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Problema P4

$$
\begin{array}{llrl}
\textit{Minimizar} & z = 3x_1 + 2x_2 & & \\
\textit{sujeto a} & x_1 - 2x_2 + x_3 & = & \frac{5}{2} \\
 & 2x_1 + x_2 \quad + x_4 & = & \frac{3}{2} \\
 & x_3 & \geq & 3 \\
 & x_2 & \geq & 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

4.3 Los problemas generados en el proceso de bifurcación se añaden a la lista de problemas que han de resolverse.

Paso 5: Poda (No ocurre nada en este paso)

Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto que la lista de problemas a procesar no está vacía, se continúa con el problema P3 en el paso 3.

Paso 3: Solución (El problema P3 es infactible; por tanto, nada tiene lugar en este paso)

Paso 4: Acotación (No ocurre nada en este paso)

Paso 5: Poda

5.2 Puesto que el problema P3 es infactible, la rama correspondiente se poda por infactibilidad.

Solución: Método B&B para un PPLE Mixta (continuación 3)

Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto que la lista de problemas no está vacía, se continúa con el problema P4 en el paso 3.

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P4

<u>*Solución*</u>: $z = 2$ para el punto (x_1=0, x_2=1, x_3=4.5, x_4=0.5)

Paso 4: Acotación (No ocurre nada en este paso)

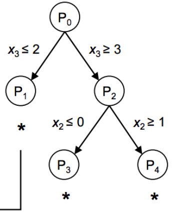
Paso 5: Poda

5.1 Puesto que la solución obtenida no satisface las condiciones de integralidad ($x_3 \notin \mathbb{N}$), y el valor correspondiente de la función objetivo es mayor que el valor actual de la cota superior, no podrá lograrse una mejor solución que la disponible llevando a cabo bifurcaciones adicionales. Así, la rama se poda por cotas.

Paso 6: Control de optimalidad

6.2 Puesto que la lista de problemas a procesar está vacía, el procedimiento concluye.

6.3 Concluido el proceso, como hay un candidato a minimizador, este candidato es la solución del problema original:



<u>*Solución*</u>: z = 1.5 para el punto (x_1=0.5, x_2=0, x_3=2, x_4=0.5)

* *No es posible otra bifurcación*

Ejemplo 3: Caso Binario

$$\begin{array}{llrcl} \textit{Maximizar} & z = & 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 & & \\ \textit{sujeto a} & & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 & \leq & 10 \\ & & x_3 + x_4 & \leq & 1 \\ & & -x_1 \qquad + x_3 \qquad & \leq & 0 \\ & & -x_2 \qquad + x_4 & \leq & 0 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

Solución: Método B&B para un PPLE Binaria

Paso 1: Iniciación

1.1 La cota superior inicial es $+\infty$ y la inferior $-\infty$.

1.2 El problema relajado, denominado P0, es el siguiente:

$$\begin{array}{llrcl} \textit{Maximizar} & z = & 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 & & \\ \textit{sujeto a} & & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 & \leq & 10 \\ & & x_3 + x_4 & \leq & 1 \\ & & -x_1 \qquad + x_3 \qquad & \leq & 0 \\ & & -x_2 \qquad + x_4 & \leq & 0 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \in & [0,1] \end{array}$$

<u>*Solución*</u>: z = 16.5 para el punto (x_1=5/6, x_2=1, x_3=0, x_4=1)

1.2c Esta solución no satisface las condiciones de integralidad ($x_1 \notin \{0,1\}$).
Así, el valor de la función objetivo se emplea para actualizar la cota superior de ∞ a 16.5

```
//Variables de decisión
dvar int x1 in 0..1;
dvar int x2 in 0..1;
dvar int x3 in 0..1;
dvar int x4 in 0..1;

//Función objetivo
maximize 9*x1 + 5*x2 + 6*x3 + 4*x4;

//Restricciones
subject to {
   6*x1 + 3*x2 + 5*x3 + 2*x4 <= 10;
                 x3 +   x4 <=  1;
    -x1        + x3        <=  0;
          -x2        +  x4 <=  0;
}
```

```
solution (optimal) with objective 14:
x1 = 1;
x2 = 1;
x3 = 0;
x4 = 0;
```

Solución: Método B&B para un PPLE Binaria (continuación 1)

Paso 2: Bifurcación

2.1 La variable que ha de ser binaria x_1, mediante bifurcación da lugar a los dos problemas siguientes:

Problema P1 (x_1=0)

$$\begin{array}{lrl} \textit{Maximizar} & z = & 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \textit{sujeto a} & & 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & & x_3 \leq 0 \\ & & -x_2 + x_4 \leq 0 \\ & & x_2, x_3, x_4 \in [0,1] \end{array}$$

Problema P2 (x_1=1)

$$\begin{array}{lrl} \textit{Maximizar} & z = & 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 9 \\ \textit{sujeto a} & & 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 4 \\ & & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & & x_3 \leq 1 \\ & & -x_2 + x_4 \leq 0 \\ & & x_2, x_3, x_4 \in [0,1] \end{array}$$

2.2 Estos problemas se colocan en la lista de problemas a procesar.

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P1

Solución: z = 9 para el punto (x_1=0, x_2=1, x_3=0, x_4=1)

Paso 4: Acotación

4.1 Puesto que la solución obtenida satisface las condiciones de integralidad (x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \{0,1\}$), y que el valor de la función objetivo (z=9) es mayor que el valor actual de la cota inferior, ésta se actualiza de $-\infty$ a 9 (la solución óptima está por tanto entre 9 y 16.5), y el maximizador encontrado se almacena como mejor candidato a maximizador del problema original.

Paso 5: Poda

5.3 Puesto que la solución actual satisface las condiciones de integralidad (x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \{0,1\}$), la rama se poda por integralidad y se continua con el paso 3.

Solución: Método B&B para un PPLE Binaria (continuación 2)

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P2

<u>*Solución*</u>: z = 16.2 para el punto (x_1=1, x_2=4/5, x_3=0, x_4=4/5)

Paso 4: Acotación

4.2 Puesto que esta solución no satisface las condiciones de integralidad (x_2, $x_4 \notin \{0,1\}$) y el valor correspondiente de la función objetivo (16.2) está entre las cotas interior y superior, la cota superior se actualiza de 16.5 a 16.2 (la solución óptima está ahora por tanto entre 9 y 16.2).

A continuación se procede a bifurcar sobre la variable x_2, lo que da lugar a los dos problemas siguientes:

<u>*Problema P3*</u> (x_1=1, x_2=0)

$$\begin{array}{lrcc} \textit{Maximizar} & z = 6x_3 + 4x_4 + 9 & & \\ \textit{sujeto a} & 5x_3 + 2x_4 & \leq & 4 \\ & x_3 + x_4 & \leq & 1 \\ & x_3 & \leq & 0 \\ & x_4 & \leq & 0 \\ & x_3, x_4 & \in & [0,1] \end{array}$$

<u>*Problema P4*</u> (x_1=1, x_2=1)

$$\begin{array}{lrcc} \textit{Maximizar} & z = 6x_3 + 4x_4 + 14 & & \\ \textit{sujeto a} & 5x_3 + 2x_4 & \leq & 1 \\ & x_3 + x_4 & \leq & 1 \\ & x_3 & \leq & 1 \\ & x_4 & \leq & 1 \\ & x_3, x_4 & \in & [0,1] \end{array}$$

4.3 Los problemas generados en el proceso de bifurcación se añaden a la lista de problemas que han de resolverse.

Paso 5: Poda (No ocurre nada en este paso)

Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto que la lista de problemas a procesar no está vacía, se continúa con el problema P3 en el paso 3.

Solución: Método B&B para un PPLE Binaria (continuación 3)

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P3 _*Solución*_: z = 13 para el punto (x_1=1, x_2=0, x_3=4/5, x_4=0)

Paso 4: Acotación (En este caso, antes de acotar y bifurcar resolveremos P4, adoptando por tanto una estrategia en anchura)

Paso 5: Poda (No ocurre nada en este paso)

Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto que la lista de problemas a procesar no está vacía, se continúa con el problema P4 en el paso 3.

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P4 _*Solución*_: z = 16 para el punto (x_1=1, x_2=1, x_3=0, x_4=0.5)

Paso 4: Acotación

4.2 Ni P3 ni P4 satisfacen las condiciones de integralidad. Como la solución del problema P4 genera una cota superior a la proporcionada por la solución del problema P3, se continua acotando desde P4. Puesto que su solución no satisface las condiciones de integralidad ($x_4 \notin \{0,1\}$) y el valor correspondiente de la función objetivo (16) está entre las cotas interior y superior, la cota superior se actualiza de 16.2 a 16 (la solución óptima está ahora por tanto entre 9 y 16).

A continuación se procede a bifurcar sobre la variable x_3 desde el problema P4, lo que da lugar a los dos problemas siguientes:

*Problema P5* (x_1=1, x_2=1, x_3=0)

$$\begin{array}{llrcl} \textit{Maximizar} & z = & 4x_4 + 14 & & \\ \textit{sujeto a} & & 2x_4 & \leq & 1 \\ & & x_4 & \in & [0,1] \end{array}$$

*Problema P6* (x_1=1, x_2=1, x_3=1)

$$\begin{array}{llrcl} \textit{Maximizar} & z = & 4x_4 + 20 & & \\ \textit{sujeto a} & & x_4 & \leq & 0 \\ & & x_4 & \in & [0,1] \end{array}$$

4.3 Los problemas generados en el proceso de bifurcación se añaden a la lista de problemas que han de resolverse.

Solución: Método B&B para un PPLE Binaria (continuación 4)

Paso 3: Solución

3.1 Se resuelve el problema P5

<u>*Solución*</u>: z = 16 para el punto (x_1=1, x_2=1, x_3=1, x_4=0.5)

Paso 4: Acotación (No ocurre nada en este paso, al igual que en el caso anterior, se espera a resolver P6)

Paso 5: Poda (No ocurre nada en este paso)

Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto que la lista de problemas a procesar no está vacía, se continúa con el problema P6 en el paso 3.

Paso 3: Solución (El problema P6 es infactible; por tanto, nada tiene lugar en este paso)

Paso 4: Acotación (No ocurre nada en este paso)

Paso 5: Poda

5.2 Puesto que el problema P6 es infactible, la rama correspondiente se poda por infactibilidad.

Paso 6: Control de optimalidad

6.1 Puesto aún están pendientes las bifurcaciones de los problemas P3 y P5, la lista de problemas a procesar no estará vacía tras las bifurcaciones correspondientes.

Dado que el nodo P5 se ha creado más recientemente que el P3, y por tanto la resolución de los problemas obtenidos tras la bifurcación será más eficiente que la de los asociados a P3, se continua bifurcando P5 en el paso 2.

Solución: Método B&B para un PPLE Binaria (continuación 5)

Paso 2: Bifurcación

2.1 La variable que ha de ser binaria x_4, mediante bifurcación da lugar a los dos problemas siguientes:

<u>*Problema P7*</u> (P5 con x_4=0)

<u>*Solución*</u>: z = 14 para el punto (x_1=1, x_2=1, x_3=0, x_4=0)

<u>*Problema P8*</u> (P5 con x_4=1)

<u>*Solución*</u>: No es factible

Paso 4: Acotación

4.1 Puesto que la solución de P7 satisface las condiciones de integralidad (x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \{0,1\}$), y que el valor de la función objetivo (z=14) es mayor que el valor actual de la cota inferior, ésta se actualiza de 9 a 14 (la solución óptima está por tanto entre 14 y 16), y el maximizador encontrado se almacena como mejor candidato a maximizador del problema original.

Paso 5: Poda

5.3 Puesto que la solución de P7 satisface las condiciones de integralidad (x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \{0,1\}$), la rama se poda por integralidad.

5.2 Puesto que el problema P8 es infactible, la rama correspondiente se poda por infactibilidad.

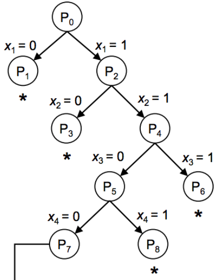
5.1 Puesto que P3 no satisface las condiciones de integralidad y además el valor de su función objetivo (13) es menor que la cota superior (14), no es posible obtener soluciones mediante bifurcaciones adicionales de esa rama, y por tanto se poda por cotas.

Paso 6: Control de optimalidad

6.2 Puesto que la lista de problemas a procesar está vacía, el procedimiento concluye.

6.3 Concluido el proceso, como hay un candidato a maximizador, este candidato es la solución del problema original:

<u>*Solución*</u>: z = 14 para el punto ($x1$=1, x_2=1, x_3=0, x_4=0)



* *No es posible otra bifurcación*

Técnicas de preprocesamiento para PPLE Binarios

En la mayoría de las ocasiones, la formulación del PPLE Binario proporcionado por el usuario puede ser inspeccionada con el fin de reformular dicho problema de tal forma que su solución sea mucho más rápida sin eliminar ninguna región factible. Dicha reformulación del problema original se basa en las tres técnicas siguientes:

1. *Fijado de variables*: Consiste en identificar aquellas variables cuyo valor puede fijarse a uno de sus posibles valores (0 ó 1) debido a que para el otro valor la solución no es ni óptima ni factible.

2. *Eliminación de restricciones redundantes*: Consiste en identificar aquellas restricciones que ya están automáticamente incluidas en otras para eliminarlas.

3. *Estrechamiento de restricciones*: También llamado reducción de coeficientes, consiste en endurecer ciertas restricciones con el fin de reducir la región factible del problema relajado sin eliminar ninguna solución factible del PPLE Binario original.

1. Fijado de variables

Si un valor de una determinada variable no puede satisfacer una restricción incluso cuando el resto de variables utilizan sus mejores valores para satisfacerla, entonces el valor de dicha variable debe ser fijado a su otro valor.

Por ejemplo, para las siguientes restricciones ≤ se puede fijar el valor de la variable x_1 a 0, ya que para x_1=1 las restricciones no son satisfechas aún en el caso de utilizar los mejores valores (0 para una variable con coeficiente no negativo y 1 para una variable con coeficiente negativo) para el resto de variables:

$$\begin{array}{rcccr} 3x_1 \le 2 & \Rightarrow & x_1 = 0 & \textit{ya que} & 3(1) > 2 \\ 3x_1 + x_2 \le 2 & \Rightarrow & x_1 = 0 & \textit{ya que} & 3(1) + 1(0) > 2 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 \le 2 & \Rightarrow & x_1 = 0 & \textit{ya que} & 5(1) + 1(0) - 2(1) > 2 \end{array}$$

El procedimiento general para chequear cualquier restricción ≤ consiste en identificar la variable con el mayor coeficiente positivo, y si la suma de dicho coeficiente con el resto de coeficientes negativos es superior al término independiente situado al lado derecho de la restricción, entonces el valor de dicha variable debe fijarse a 0. A continuación, el procedimiento debe repetirse para la siguiente variable con el mayor coeficiente positivo, etc…

Un procedimiento análogo puede utilizarse para fijar el valor de una variable a 1 en el caso de restricciones ≥, como se muestra a continuación para la variable x_1:

$$\begin{array}{rcccr} 3x_1 \geq 2 & \Rightarrow & x_1 = 1 & \textit{ya que} & 3(0) < 2 \\ 3x_1 + x_2 \geq 2 & \Rightarrow & x_1 = 1 & \textit{ya que} & 3(0) + 1(1) < 2 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 & \Rightarrow & x_1 = 1 & \textit{ya que} & 5(0) + 1(1) - 2(0) < 2 \end{array}$$

Una restricción ≥ también nos puede permitir fijar el valor de una variable a 0, como se muestra a continuación:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0 \quad \textit{ya que} \quad 1(1) + 1(1) - 2(1) < 1$$

A continuación se muestra otro ejemplo en el que una restricción ≥ nos permite fijar el valor de una variable a 1 y el de otra a 0:

$$\begin{array}{rcccr} 3x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 2 & \Rightarrow & x_1 = 1 & \textit{ya que} & 3(0) + 1(1) - 3(0) < 2 \\ & y & x_3 = 0 & \textit{ya que} & 3(1) + 1(1) - 3(1) < 2 \end{array}$$

Análogamente, una restricción ≤ con el término independiente del lado derecho negativo, permite fijar el valor de una variable a

$$\begin{array}{rcccr} 3x_1 - 2x_2 \leq -1 & \Rightarrow & x_1 = 0 & \textit{ya que} & 3(1) - 2(1) > -1 \\ & y & x_2 = 1 & \textit{ya que} & 3(0) - 2(0) > -1 \end{array}$$

A veces, fijar el valor de una variable en una restricción puede generar que se pueda fijar el valor de otras variables en otras restricciones. Por ejemplo, supóngase la siguiente restricción:

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \textit{ya que} \quad 3(0) + 1(1) - 2(0) < 2$$

que sobre $x_1 + x_4 + x_5 \leq 1$ *da lugar a* $x_4 = 0$ *y* $x_5 = 0$

y sobre $-x_5 + x_6 \leq 0$ *da lugar a* $x_6 = 0$

En algunas ocasiones, es posible combinar una o más restricciones mutuamente exclusivas junto con otra restricción para fijar el valor de alguna variable como en el ejemplo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 8x_1 - 4_2 - 5x_3 + 3x_4 \leq 2 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \qquad \textit{ya que} \qquad 8(1) - \max\{4,5\}(1) + 3(0) > 2$$

Para terminar, y sin entrar en más detalles, simplemente comentar que otras alternativas para el finado de variables que incluyen criterios de optimalidad, y que el fijado de variables puede llegar a tener un impacto dramático en la reducción del tamaño del problema pudiendo llegar al 50% o superior.

2. Eliminación de restricciones redundantes

Si una restricción funcional se satisface hasta para los peores valores de sus variables binarias, entonces es redundante y puede ser eliminada del modelo.

- Para una restricción ≤ los peores valores de sus variables binarias son 1 siempre y cuando sus coeficientes sean no negativos y 0 en caso contrario.
- Para una restricción ≥ los peores valores de sus variables binarias son 0 siempre y cuando sus coeficientes sean no negativos y 1 en caso contrario.

Estos son algunos ejemplos:

$$\begin{array}{rccr} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 & \textit{es redundante,} & \textit{ya que} & 3(1) + 2(1) \leq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 3 & \textit{es redundante,} & \textit{ya que} & 3(1) - 2(0) \leq 3 \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -3 & \textit{es redundante,} & \textit{ya que} & 3(0) - 2(1) \geq -3 \end{array}$$

En la mayoría de los casos en los que una restricción resulta ser redundante, ésta no lo era en el modelo original, pero si en el modelos resultantes tras el fijado de variables. Como puede observarse, esto ocurre en la mayoría de los ejemplos de las dos transparencias anteriores.

3. Estrechamiento de restricciones

Considérese el problema siguiente:

$$\begin{array}{llcl} \textit{Maximizar} & z = 3x_1 + 2x_2 & & \\ \textit{sujeto a} & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

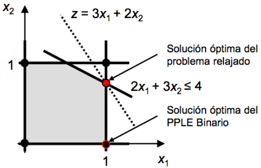
Problema relajado

$$\begin{array}{llcl} \textit{Maximizar} & z = 3x_1 + 2x_2 & & \\ \textit{sujeto a} & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2 & \in & [0,1] \end{array}$$

Dicho problema tan solo tiene tres soluciones factibles, (0,0), (0,1) y (1,0), siendo (1,0) la óptima con un valor de *z*=3.

Sin embargo, como se muestra en la figura, la solución óptima del problema relajado es (1,2/3) con un valor de *z*=4.33, que no está demasiado cerca de la solución óptima del problema binario.

Así, el algoritmo B&B debería ejecutar varias iteraciones hasta identificar el óptimo del problema binario.

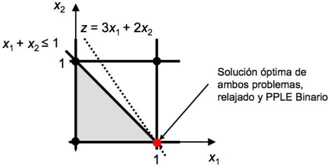


Nótese ahora qué ocurre cuando la restricción funcional del problema $2x_1 + 3x_2 \leq 4$ es sustituida por esta otra $x_1 + x_2 \leq 1$:

El problema binario permanece igual, con tres soluciones factibles, (0,0), (0,1) y (1,0), siendo (1,0) la óptima con un valor de *z*=3.

Sin embargo, la región factible del problema relajado se ha reducido Sustancialmente hasta el punto de que su solución coincide con la del problema binario original sin necesidad de llevar a cabo ninguna iteración del algoritmo B&B.

Así, se ha conseguido reducir la región factible sin eliminar ninguna solución factible del problema binario original.



Procedimiento para el estrechamiento de restricciones

Como se ha visto en el ejemplo anterior, el método resulta bastante sencillo para dos variables, en donde la región factible es fácilmente visualizable de forma gráfica. Sin embargo, los mismos principios para la reducción de la región factible sin eliminar ninguna solución del problema binario original pueden aplicarse a un problema con cualquier número de variables siguiendo el procedimiento siguiente:

Sea la restricción $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le b$:

1. Calcular $S = \sum_{j=1\ /\ a_j>0}^{n} a_j$
2. Identificar los $a_j \neq 0$ *tal que* $S < b + |a_j|$
   (a) Si no hay ninguno, no es posible reducir la región factible.
   (b) Si $a_j > 0$ continuar con el paso 3. Si $a_j < 0$ continuar con el paso 4.
3. Calcular $\bar{a}_j = S - b$ y $\bar{b} = S - a_j$, resetear $a_j = \bar{a}_j$ *y* $b = \bar{b}$ y volver al paso 1.
4. Incrementar a_j a $a_j = b - S$ y volver al paso 1.

Ejemplo: Apliquemos dicho procedimiento a la restricción $2x_1 + 3x_2 \le 4$

1. S=5
2. Tanto a_1 como a_2 satisfacen la restricción del punto 2. Se toma a_1 arbitrariamente.
3. La nueva restricción estrechada resulta ser: $x_1 + 3x_2 \le 3$

1. S=4
2. Tan solo a_2 satisface la restricción del punto 2.
3. La nueva restricción estrechada resulta ser: $x_1 + x_2 \le 1$

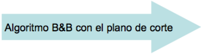
1. S=2
2. Ningún a_j satisface la restricción del punto 2.

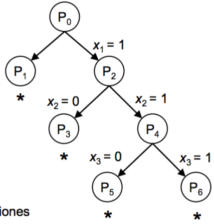
Generación de planos de corte pata PPLE Binarios

Un ***plano de corte*** (o simplemente ***corte***) para cualquier PPLE es una restricción funcional que reduzca la región factible de la relajación lineal del problema original sin eliminar sin eliminar ninguna de sus soluciones factibles. Así, por ejemplo, el método de estrechamiento de restricciones visto anteriormente puede considerarse como un método de generación de planos de corte para PPLE Binarios.

Adicionalmente, existen otra serie de técnicas para generar planos de corte que reduzcan la región factible acelerando el proceso mediante el cual el algoritmo B&B alcanza la solución óptima. A continuación se muestra una de tales técnicas para PPLE Binarios. Para ilustrar dicho método, considérese de nuevo el problema mostrado en el Ejemplo 3.

$$
\begin{array}{lllll}
\textit{Maximizar} & z= & 9x_1+5x_2+6x_3+4x_4 & & \\
\textit{sujeto a} & & 6x_1+3x_2+5x_3+2x_4 & \leq & 10 \\
 & & -x_1 \quad\quad + x_3 & \leq & 0 \\
 & & \quad -x_2 \quad\quad + x_4 & \leq & 0 \\
 & & x_1,x_2,x_3,x_4 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$





Recuérdese que la solución de la relajación lineal asociada P0 es z = 16.5 para el punto (x_1=5/6, x_2=1, x_3=0, x_4=1).

Como se verá en el procedimiento mostrado en la siguiente transparencia, la primera de las restricciones junto con el hecho de que las variables son binarias da lugar al siguiente plano de corte $x_1+x_2+x_4 \leq 2$

Nótese como dicho corte elimina parte de la región factible para el problema relajado P0 (incluida su solución óptima), pero no elimina ninguna de las soluciones enteras factibles del problema original. Así, simplemente añadiendo dicho plano de corte al modelo original, el rendimiento del algoritmo B&B mejora en los dos aspectos siguientes:

- En primer lugar, la solución óptima del nuevo problema relajado P0 resulta ser z = 15.2 para el punto (x_1=1, x_2=1, x_3=0.2, x_4=0), por lo que la cota superior se actualiza de ∞ a 15.2 en lugar de a 16.5.
- En segundo lugar, se necesita una iteración menos del método B&B para alcanzar la solución óptima ya que la solución óptima del problema relajado P5 resulta ser z = 14 para el punto (x_1=1, x_2=1, x_3=0, x_4=0), podándose por tanto dicha rama por integralidad. A continuación la rama correspondiente al nodo P3 se poda de nuevo debido al punto 5.1 resultando la solución de P5 el óptimo.

Procedimiento para la generación de un plano de corte en PPLE Binaria

1. Considérese cualquier restricción funcional del tipo ≤ con todos los coeficientes no negativos.

2. Encontrar el conjunto de variables (denominado ***envoltura mínima*** de la restricción) tal que:

   (a) La restricción no se satisface si cada variable de la envoltura mínima vale 1 y el resto 0.

   (b) Pero la restricción pasa a ser satisfecha si el valor de cualquier variable de la envoltura mínima pasa de valer 1 a valer 0.

3. Denotando *N* como el número de variables de la envoltura mínima, el ***plano de corte*** resultante tiene la forma $\sum_{\substack{x_i \in envoltura \\ mínima}} x_i \leq N-1$

Ejemplo: Apliquemos dicho procedimiento a la restricción $6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$

1. La restricción satisface el criterio especificado en el paso 1.

2. La envoltura mínima está formada por las variables (x_1, x_2, x_4), ya que:

   (a) (1, 1, 0, 1) no satisface la restricción.

   (b) Pero la restricción pasa a ser satisfecha si el valor de cualquiera de las variables (x_1, x_2, x_4) pasa de valer 1 a valer 0.

3. Puesto que *N*=3, el plano de corte resultante es $x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$

Nótese que dicha restricción tiene una segunda envoltura mínima:

2. La envoltura mínima está formada por las variables (x_1, x_3), ya que:

   (a) (1, 0, 1, 0) no satisface la restricción.

   (b) Pero la restricción pasa a ser satisfecha si el valor de cualquiera de las variables (x_1, x_3) pasa de valer 1 a valer 0.

3. Puesto que *N*=2, el plano de corte resultante es $x_1 + x_3 \leq 1$

Método de los cortes de Gomoroy

Un método alternativo de solución de PPLE es el procedimiento de los ***cortes de Gomory***. En esta técnica, se resuelve el problema original relajado en el que se incluyen restricciones adicionales, que reducen la región factible sin excluir soluciones que cumplen las condiciones de optimalidad. En cada iteración se añade una restricción que se denomina corte de Gomory. Este procedimiento genera progresivamente una envoltura convexa de la región factible, lo que origina soluciones que cumplen las condiciones de integralidad.

Generación de un corte

La región factible del problema original es $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, que empleando la partición estándar del simplex se escribe como:

$$(\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N})\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Denotando por $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ y $\overline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_N = \overline{\boldsymbol{b}}$

Sea $\boldsymbol{x}_B$ una variable básica que ha de ser entera pero no lo es.

La fila correspondiente a esta variable en la ecuación anterior es: $x_{B_i} + \sum_j u_{ij} x_{N_j} = \overline{b}_i$

Puesto que la solución obtenida es básica y factible, la variables x_{Nj}, que son no básicas, son cero; por tanto, $\overline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{x}_B$, y puesto que x_{Bi} es no entera, $\overline{b}_i$ ha de ser no entera.

Por otra parte, cada elemento u_{ij} se puede expresar como suma de una parte entera (positiva, negativa o nula), e_{ij}, y una fracción no negativa menor que 1, f_{ij}:

$$u_{ij} = e_{ij} + f_{ij} \quad ; \quad \forall j$$

De forma análoga, $\overline{b}_i$ se puede descomponer como $\overline{b}_i = \overline{e}_i + \overline{f}_i$ donde $\overline{e}_i$ es un entero (positivo o negativo) y $\overline{f}_i$ una fracción no negativa menor que 1. Obsérvese que algunos f_{ij} pueden ser cero, pero $\overline{f}_i$ ha de ser positivo.

Sustituyendo $u_{ij} = e_{ij} + f_{ij} \;\; ; \;\; \forall j$ y $\bar{b}_i = \bar{e}_i + \bar{f}_i$ en $x_{B_i} + \sum_j u_{ij} x_{N_j} = \bar{b}_i$, se obtiene:

$$x_{B_i} + \sum_j (e_{ij} + f_{ij}) x_{N_j} = \bar{e}_i + \bar{f}_i \quad \Rightarrow \quad x_{B_i} + \sum_j e_{ij} x_{N_j} - \bar{e}_i = \bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j}$$

En la ecuación anterior, el término de la izquierda ha de ser entero puesto que todas sus variables son enteras. Por tanto, el término de la derecha también será entero.

Por otra parte, tanto f_{ij} como x_{Nj} son no negativos para todo j, por tanto el término $\sum_j f_{ij} x_{N_j}$ es no negativo.

Finalmente, el término de la derecha de la ecuación precedente, $\bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j}$ es a la vez:

- entero, y
- menor que una fracción positiva, $\bar{f}_i$, menor que 1

y puesto que los enteros que satisfacen esa condición son 0,−1,−2, . . ., entonces $\bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j}$ es un entero no positivo.

Por tanto $\bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j} \leq 0$ ó $\sum_j f_{ij} x_{N_j} - \bar{f}_i \geq 0$

Esta última desigualdad se denomina ***corte de Gomory*** asociado a la variable básica x_{Bi} que ha de ser entera pero no lo es.

A continuación se resumen las ecuaciones utilizadas en el método de los cortes de Gomoroy:

1. $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ y $\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{x_N} = \bar{\boldsymbol{b}} \Rightarrow x_{B_i} + \sum_j u_{ij} x_{N_j} = \bar{b}_i$

2. $u_{ij} = e_{ij} + f_{ij} \;\; ; \;\; \forall j$ y $\bar{b}_i = \bar{e}_i + \bar{f}_i$

3. $\bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j} \leq 0$

Algoritmo de los cortes de Gomoroy para un PPLE

A continuación se enumeran los pasos del algoritmo de los cortes de Gomoroy para un PPLE:

Paso 1: Iniciación

1.1 Se resuelve el problema original sin restricciones de integralidad.

- 1.1.a Si la solución no está acotada, el problema original o no está acotado y se para.
- 1.2.b Si el problema es infactible, el problema original también lo es y se para.
- 1.2.c En cualquier otro caso, se continua con el paso siguiente.

Paso 2: Control de optimalidad

2.1 Si la solución obtenida cumple las condiciones de integralidad, se para dado que esta solución es óptima.

2.2 En cualquier otro caso, se continua con el paso siguiente.

Paso 3: Generación de un corte

3.1 Se emplea una variable básica que ha de ser entera pero no lo es para generar un corte de Gomory.

Paso 4: Resolución

4.1 Se añade el corte de Gomory obtenido al problema previamente resuelto, se resuelve el problema resultante y se continúa con el paso 2.

Deben además tenerse en cuenta los aspectos siguientes:

- Obsérvese que el número de restricciones crece con el número de iteraciones.
- Puesto que en cada iteración se añade una nueva restricción, debe emplearse para la resolución del problema el método simplex dual. Esto es así puesto que al añadir una nueva restricción, el problema primal correspondiente se hace infactible pero su dual permanece factible, aunque no óptimo.
- Por tanto, para resolver el nuevo problema puede partirse de la solución dual del problema previo (sin restricción adicional), lo que supone una ventaja computacional importante.

Ejemplo 4: Algoritmo de los cortes de Gomoroy

Sea el siguiente PPLE Pura:

$$\begin{array}{lrcl} \textit{Maximizar} & z = 120x_1 + 80x_2 & & \\ \textit{sujeto a} & 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 7x_1 + 8x_2 & \leq & 28 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbf{N} \end{array}$$

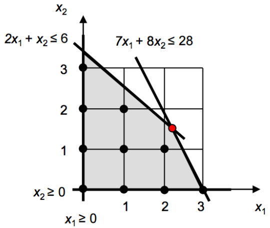
Se trata de obtener su solución mediante el método de los cortes de Gomoroy.

Solución: Algoritmo de los cortes de Gomoroy

Paso 1: Iniciación

1.1 El problema relajado, es el siguiente:

$$\begin{array}{lrcl} \textit{Maximizar} & z = 120x_1 + 80x_2 & & \\ \textit{sujeto a} & 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ & 7x_1 + 8x_2 \quad + x_4 & = & 28 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$



<u>*Solución*</u>: z = 391.11 para el punto (x_1=5, x_2=4.5)

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{9} \\ \frac{14}{9} \end{pmatrix}$$

1.2c Se continua con el paso siguiente.

Solución: Algoritmo de los cortes de Gomoroy (continuación 1)

Paso 2: Control de optimalidad

2.2 Como la solución obtenida no cumple las condiciones de integralidad, se continua con el paso siguiente.

Paso 3: Generación de un corte

3.1 Si se emplea la variable x_2 para generar un corte de Gomory, se obtiene:

$$U = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad x_{B_i} + \sum_j u_{ij} x_{N_j} = \bar{b}_i \qquad x_2 - \frac{7}{9}x_3 + \frac{2}{9}x_4 = \frac{14}{9}$$

Por tanto, se obtiene:

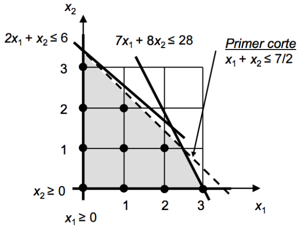
$$u_{21} = e_{21} + f_{21} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{7}{9} = -1 + \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad f_{21} = \frac{2}{9}$$

$$u_{22} = e_{22} + f_{22} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{9} = 0 + \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad f_{22} = \frac{2}{9}$$

$$\bar{b}_2 = \bar{e}_2 + \bar{f}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{14}{9} = 1 + \frac{5}{9} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}_2 = \frac{5}{9}$$

Y el corte resulta ser: $\bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j} \leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{5}{9} - \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq 0$

$$\Rightarrow \; x_3 + x_4 \geq \tfrac{5}{2}$$



Nótese que este corte puede expresarse en función de las variables originales x_1 y x_2, de la forma siguiente. Empleando las restricciones de igualdad del problema relajado en forma estándar, x_3 y x_4 pueden expresarse en función de x_1 y x_2 :

$$x_3 = 6 - 2x_1 - x_2$$

$$x_4 = 28 - 7x_1 - 8x_2$$

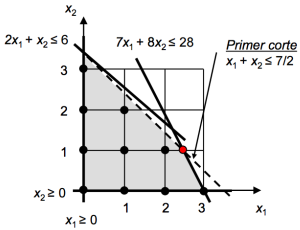
Así, el corte en función de las variables x_1 y x_2 resulta ser $x_1 + x_2 \leq \frac{7}{2}$, que como puede verse en la figura da lugar a una reducción efectiva de la región factible y, sin embargo, no se excluye ninguna solución entera.

Solución: Algoritmo de los cortes de Gomoroy (continuación 2)

Paso 4: Resolución

4.1 Se resuelve el nuevo problema con el primer corte añadido como restricción adicional. Obsérvese que el corte de Gomory se escribe incluyendo una variable artificial x_5:

$$\begin{array}{llrl} \textit{Maximizar} & z = 120x_1 + 80x_2 & & \\ \textit{sujeto a} & 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ & 7x_1 + 8x_2 \quad + x_4 & = & 28 \\ & x_3 + x_4 - x_5 & = & \frac{5}{2} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array}$$



Solución: $z = 380$ para el punto $(x_1=5/2,\ x_2=1)$

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{x_B} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Generación de un corte

3.1 Si se emplea la variable x_1 para generar un corte de Gomory, se obtiene:

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{9} \\ -1 & \frac{2}{9} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad x_{B_i} + \sum_j u_{ij} x_{N_j} = \bar{b}_i \qquad x_1 + x_3 - \frac{1}{9}x_5 = \frac{5}{2}$$

Por tanto, se obtiene:

$$\begin{array}{llll} u_{11} = e_{11} + f_{11} & \Leftrightarrow & 1 = 1 + 0 & \Rightarrow \quad f_{11} = 0 \\ u_{12} = e_{12} + f_{12} & \Leftrightarrow & -\frac{1}{9} = -1 + \frac{8}{9} & \Rightarrow \quad f_{12} = \frac{8}{9} \\ \bar{b}_1 = \bar{e}_1 + \bar{f}_1 & \Leftrightarrow & \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} & \Rightarrow \quad \bar{f}_1 = \frac{1}{2} \end{array}$$

Y el corte resulta ser:

$$\bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} \leq 0$$

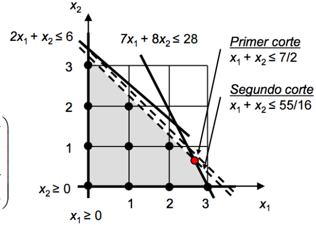
$$\Rightarrow \quad x_5 \geq \frac{9}{16} \quad \text{ó} \quad x_1 + x_2 \leq \frac{55}{16}$$

Solución: Algoritmo de los cortes de Gomoroy (continuación 3)

Paso 4: Resolución

4.1 Se resuelve el nuevo problema con el primer corte añadido como restricción adicional. Obsérvese que el corte de Gomory se escribe incluyendo una variable artificial x_6:

$$\begin{array}{llrcl} \textit{Maximizar} & z = & 120x_1 + 80x_2 & & \\ \textit{sujeto a} & & 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ & & 7x_1 + 8x_2 \quad + x_4 & = & 28 \\ & & x_3 + x_4 - x_5 & = & \frac{5}{2} \\ & & x_5 - x_6 & = & \frac{9}{16} \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array}$$



Solución: $z = 377.5$ para el punto (x_1=41/16, x_2=7/8)

$$\bar{b} = x_B = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_4^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{16} \\ \frac{7}{8} \\ \frac{49}{16} \\ \frac{9}{16} \end{pmatrix}$$

Paso 3: Generación de un corte

3.1 Si se emplea la variable x_2 para generar un corte de Gomory, se obtiene:

$$U = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{9} \\ -1 & \frac{2}{9} \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_{B_i} + \sum_j u_{ij} x_{N_j} = \bar{b}_i \qquad x_2 - x_3 + \frac{2}{9}x_6 = \frac{7}{8}$$

Por tanto, se obtiene:

$$\begin{array}{llllll} u_{21} = e_{21} + f_{21} & \Leftrightarrow & -1 = -1 + 0 & \Rightarrow & f_{21} = 0 \\ u_{22} = e_{22} + f_{22} & \Leftrightarrow & \frac{2}{9} = 0 + \frac{2}{9} & \Rightarrow & f_{22} = \frac{2}{9} \\ \bar{b}_2 = \bar{e}_2 + \bar{f}_2 & \Leftrightarrow & \frac{7}{8} = 0 + \frac{5}{8} & \Rightarrow & \bar{f}_2 = \frac{7}{8} \end{array}$$

$$\Rightarrow \bar{f}_i - \sum_j f_{ij} x_{N_j} \leq 0 \Rightarrow \frac{7}{8} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} \leq 0$$

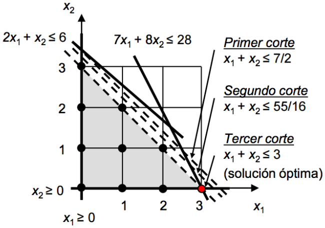
$$\Rightarrow x_6 \geq \frac{63}{16} \quad ó \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

Solución: Algoritmo de los cortes de Gomoroy (continuación 4)

Paso 4: Resolución

4.1 Se resuelve el nuevo problema con el primer corte añadido como restricción adicional. Obsérvese que el corte de Gomory se escribe incluyendo una variable artificial x_7:

$$
\begin{array}{llrcl}
\textit{Maximizar} & z = 120x_1 + 80x_2 & & & \\
\textit{sujeto a} & 2x_1 + x_2 + x_3 & -x_7 & = & 6 \\
 & 7x_1 + 8x_2 + x_4 & -x_7 & = & 28 \\
 & x_3 + x_4 - x_5 & -x_7 & = & \frac{5}{2} \\
 & x_5 - x_6 & -x_7 & = & \frac{9}{16} \\
 & x_6 & -x_7 & = & \frac{63}{16} \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & & \geq & 0
\end{array}
$$



<u>*Solución*</u>: z = 360 para el punto (x_1=3, x_2=0)

Paso 2: Control de optimalidad

2.1 Como la solución obtenida cumple las condiciones de integralidad, se para dado que esta solución es óptima.

<u>*Solución*</u>: z = 360 para el punto (x_1=3, x_2=0)

```
//Variables de decisión
dvar int+ x1;
dvar int+ x2;

//Función objetivo
maximize 120*x1 + 80*x2;

//Restricciones
subject to {
   2*x1 +    x2 <=  6;
   7*x1 + 8*x2 <= 28;
}
```

```
solution (optimal) with objective 360:
x1 = 3;
x2 = 0;
```