TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

CRISTÓBAL ROJAS

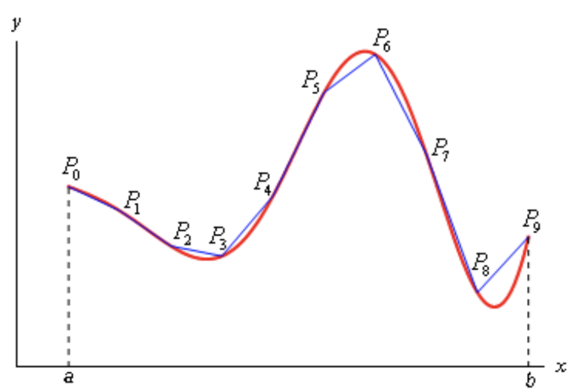
Resumen. Lea con atención. Trabaje en grupo. Solamente cuando el grupo completo haya consensuado una conclusión o respuesta, podrán avanzar a la siguiente pregunta.

El objectivo de esta actividad es aplicar el “principio de subdivisión y paso al límite”para determinar el largo del tipo $y = f(x); x \in [a, b]$. Recordemos que una tal curva corresponde al conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación $y = f(x)$, es decir, aquellos de la forma $(x, f(x))$.

1) Si (a, b) y (c, d) son las coordenadas de dos puntos en el plano, calcule el largo de la recta que los une.

2) Sea $\{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n = b\}$ una partición regular del intervalo $[a, b]$. Calcule Δx y x_i en función de a, b y n.

Considere ahora una función $f(x)$ derivable el intervalo $[a, b]$. Sean $P_0, P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_n$ los puntos del plano que pertenecen a la curva definida por $f(x)$ entre a y b, y que tienen por coordenada X a los x_i de la partición. Por ejemplo, $P_0 = (a, f(a))$. La siguiente figura muestra la situación para $n = 9$:



3) Calcule el largo de la recta L_1 que une P_0 con P_1.

4) Calcule el largo de la recta L_i que une P_{i-1} con P_i.

5) El Teorema del Valor medio dice que para cada i existe x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$ para el cual se cumple que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

Use este hecho para deducir que el largo de L_i es igual a $\sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \cdot \Delta x$.

6) Escriba la suma que representa el largo de la curva que se obtiene al unir las rectas $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

7) Interprete la suma anterior como suma de Riemann y deduzca que el largo de la curva $y = f(x)$ entre a y b esta dado por

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

8) Use la fórmula obtenida para calcular el largo de $y = \ln(sec(x))$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.