LA INTEGRAL DE RIEMANN

CRISTÓBAL ROJAS

Resumen. Trabaje en grupo. Solamente cuando el grupo completo haya consensuado una conclusión o respuesta, podrán avanzar a la siguiente pregunta.

Recordemos de la clase anterior, el Teorema fundamental del Cálculo, I parte:

Theorem 1 (Teorema Fundamental del Cálculo, Primera parte (TFC-I))**.** *Si $u(t)$ es una función continua a valores reales y $a \in \mathbb{R}$ es un real cualquiera, entonces la función $g(x)$ definida por*

$$g(x) := \int_a^x u(t)\,dt$$

es diferenciable y se cumple que

$$\frac{dg}{dx} = u(x).$$

Utilice el teorema anterior para encontrar la derivada con respecto a x de las siguientes funciones.

1.) $\displaystyle\int_1^x \cos^2(t)\,dt$ 2.) $\displaystyle\int_x^1 \cos(3t)\,dt$

3.) $\displaystyle\int_1^2 t^n\,dt$ 4.) $\displaystyle\int_1^2 x^n\,dt$

5.) $\displaystyle\int_x^{x+1} v(t)\,dt$ 6.) $\displaystyle\int_0^{x^2} u^3\,du$ 7.) $\displaystyle\int_0^{\sin(x)} \operatorname{arc\,sen}(t)\,dt.$

A continuación, el objetivo será demostrar el siguiente importante resultado:

Theorem 2 (Teorema Fundamental del Cálculo, Segunda parte (TFC-II))**.** *Si la función $v(x)$ cumple que $v(x) = \dfrac{df}{dx}$, entonces*

$$\int_a^b v(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Para demostrar el teorema, deberá seguir los siguientes pasos:

1. Del enunciado del teorema TFC-II, sabemos que la derivada de $f(x)$ es $v(x)$. Encuentre otra función, $g(x)$, cuya derivada también sea $v(x)$ (utilice el teorema TFC-I).
2. Defina una nueva función $h(x)$ por $h(x) := g(x) - f(x)$. Muestre que $\frac{dh}{dx} = 0$ y concluya que $h(x)$ debe ser una función constante.
3. Deduzca que existe una constante $c \in \mathbb{R}$ para la cual se cumple que
$$g(x) = f(x) + c.$$
4. Calcule $g(a)$.
5. Calcule $g(b)$.
6. Calcule $g(b) - g(a)$.
7. Demuestre el TFC-II.