

LA INTEGRAL DE RIEMANN

CRISTÓBAL ROJAS

RESUMEN. Trabaje en grupo. Solamente cuando el grupo completo haya consensuado una conclusión o respuesta, podrán avanzar a la siguiente pregunta.

1. UNA DEFINICIÓN DE INTEGRAL

Recuerde que para una función $f : [a, b]$ a valores reales, definimos las **sumas de Riemann** a resolución n como la aproximación que se obtiene usando el método de la subdivisión:

$$S_n(f)_a^b = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta_i ;$$

donde $\Delta_i = (b - a)/n$ es el largo de cada subintervalo y $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ es un punto cualquiera en el subintervalo correspondiente. Hay dos sumas de Riemann especiales: la suma superior y la suma inferior, que denotamos por

$$\overline{S}_n(f)_a^b \quad \text{y} \quad \underline{S}_n(f)_a^b;$$

y que se obtienen eligiendo los x_i^* que maximizan (suma superior) o minimizan (suma inferior) el valor de la función f en cada subintervalo.

Definition 1. Una función f es **integrable** si el límite cuando n tiende a infinito de sus sumas de Riemann existe y es siempre el mismo (independiente de las sumas que se escojan). Es decir, cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_n(f)_a^b = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n(f)_a^b.$$

A este límite lo llamamos **integral definida de $f(x)$ entre a y b** , y lo denotamos por $\int_a^b f(x) dx$.

2. VALOR MEDIO, O PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN

Nuestro objetivo aquí será definir el concepto de “Valor Promedio” de una función $f(x)$ con x en el intervalo $[a, b]$.

1. Si $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n$ son n números reales, calcule el valor promedio.
2. Ahora calcularemos una *aproximación* al valor medio de $f(x)$. Para esto, considere $x_i, i = 1, \dots, n$ una partición regular de $[a, b]$ y calcule el promedio de los valores que f toma en los puntos de esta partición.
3. Usando la noción de límite, proponga una definición para el valor medio de $f(x)$ en $[a, b]$.
4. ¿Como se compara su definición de valor medio con nuestra definición de $\int_a^b f(x) dx$?
5. ¿Puede expresar el valor medio de f en términos de su integral entre a y b ?
6. Considere el rectángulo de base $[a, b]$ cuya área es igual a la de la región bajo la curva de $f(x)$, con $x \in [a, b]$. ¿Cuál es la altura de ese rectángulo? Explique.