SERIES INFINITAS: LA SERIE GEOMÉTRICA

¿Recuerda la notación decimal? Por ejemplo:

$$3,497... = 3 \cdot \frac{1}{10^0} + 4 \cdot \frac{1}{10^1} + 9 \cdot \frac{1}{10^2} + 7 \cdot \frac{1}{10^3} + ...$$

1. Convierta a notación decimal las siguientes expresiones expandidas

$$a) \sum_{i=0}^{5} \frac{3}{10^i} \qquad b) \sum_{i=0}^{7} \frac{9}{10^i} \qquad c) \sum_{i=1}^{10} \frac{9}{10^i} \qquad d) \sum_{i=1}^{20} \frac{9}{10^i} \qquad e) \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{10^i}.$$

2. ¿Cuánto debería valer la expresión $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i}$? ¿En qué sentido?

Una **serie infinita** es una expresión de la forma:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_i + \ldots$$

en donde los términos a_i son simplemente números reales.

Definición: *Una serie se dice que* ***converge a*** L *si*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = L.$$

La más importante de las series es sin duda la **Serie Geométrica**:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}. \tag{1}$$

1. Substituya x en la serie geométrica por los valores i)$0,5$ ii)1 iii)-1. Comente sus resultados: ¿qué comportamientos muestra la serie en cada caso? ¿Qué puede decir de la validez de la fórmula (1) ?
2. Considere el número real cuya representación en decimales es $r = 1,11111111\ldots$. Escriba r en forma expandida (por ejemplo $35,12 = 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$).
3. Escriba una serie geométrica para r y calcule su valor usando la fórmula de la ecuación (1).
4. Repita el ejercicio anterior con los números $3,3333\ldots$ y $1,01010101\ldots$.
5. Escriba los 5 primeros términos de una serie convergente cuyo valor sea igual a π.
6. Considere la serie
$$4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \ldots$$
Cree ud. que ser trata de una serie convergente o divergente? Explique.
7. ¿Le sorprendería saber que la serie del punto anterior es de hecho convergente y que su valor es π?

Ahora intentaremos entender mejor la fórmula de la ecuación (1):

8. Calcule $(1 + x + x^2)(1 - x)$.
9. Pruebe que $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$.
10. Demuestre la fórmula (1). ¿Para qué valores de x es válida la demostración?