INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE

RESUMEN. **Lea con atención y trabaje en grupo**. Solamente cuando el grupo completo haya consensuado una conclusión o respuesta, podrán avanzar a la siguiente pregunta.

Definition 1. Sea $f(x)$ una función continua sobre un intervalo no acotado I, y sea $a \in \mathbb{R}$. Según el intervalo I, se define la integral impropia de f como:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx; \quad \text{o} \quad \int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)\,dx.$$

Decimos que la integral impropia es convergente, si el límite correspondiente existe, y que es divergente si no. Además, se define

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx,$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es cualquier real. Decimos que esta última integral converge cuando las dos integrales de la derecha de la igualdad son convergentes.

1. Muestre que la definición de $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ es independiente de la elección de $c \in \mathbb{R}$.
2. Determine si las siguientes integrales son o no integrales impropias de primera especie, y calcule su valor en caso de ser convergentes :

$$a)\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}\,dx \qquad b)\int_{2\pi}^\infty \operatorname{sen}(x)\,dx \qquad c)\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\,dx.$$

3. Encuentre el volumen del solido que se obtiene al rotar la función $f(x) = xe^{-x}$ para $x \geq 0$ sobre el eje X.

Proposition 1 (Comparación directa y por cuociente)**.** *Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a,\infty)$.*

- *si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq c$ con $c \in [a,\infty)$ se tiene que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge cuando $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, y que $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge cuando $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.*
- *si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe, entonces las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ son ambas convergentes o ambas divergentes.*

1. Determine si las siguientes integrales son o no convergentes. Aplique la Proposición 1 claramente.

$$a)\int_1^\infty \frac{x+1}{5x(x^2+1)}\,dx \qquad b)\int_{2\pi}^\infty \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x\sqrt{x+1}}\,dx \qquad c)\int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}\,dx.$$