Sensibilidad y Dualidad

MLG521

Profesor: Cristóbal Rojas

Departamento de Ciencias de de la Ingeniería
Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad Andrés Bello
Curso dictado en conjunto con Pamela Álvarez

MLG521

Sensibilidad

Consideremos el siguiente:

Problema Lineal

$$Min\ c^t x$$

$$s.a\ Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Sea $x_B^* = (B^*)^{-1}b$ una solución óptima. Entonces el valor objetivo óptimo es

$$z^* = c_B^t x_B^*.$$

¿Cómo cambia la solución si se modifica marginalmente el lado derecho de las restricciones?

$$b \quad \longrightarrow \quad b + \Delta b$$

Este cambio dará lugar a variaciones en la solución y en el valor objetivo óptimos:

$$x_B^* \quad \longrightarrow \quad x_B^* + \Delta x_B \ ; \qquad z^* \quad \longrightarrow \quad z^* + \Delta z$$

Aplicando linealidad, podemos escribir:

$$\Delta x_B = (B^*)^{-1} \Delta b \ ; \qquad \Delta z = c_B^t \Delta x_B$$

y por lo tanto

$$\Delta z = c_B^t (B^*)^{-1} \Delta b.$$

Si definimos $\lambda^{*t} = c_B^t (B^*)^{-1}$, podemos expresar

$$\Delta z = \lambda^{*t} \Delta b.$$

Parámetros de sensibilidad

De la ecuación

$$\Delta z = \lambda^{*t} \Delta b,$$

vemos que los coeficientes

$$\lambda_j^* = (c_B^t (B^*)^{-1})_j = \frac{\Delta z}{(\Delta b)_j}$$

representan la tasa a la que cambia z cuando se modifica el valor independiente de la restricción j.

Como veremos, estos parámetros, llamados **de sensibilidad**, corresponden a la solución óptima del **Problema Dual** asociado.

El Problema del Carpintero

Un carpintero fabrica dos tipos de mesas. Cada mesa del tipo 1 necesita 4 horas de mecanizado primario (preparación de piezas) y 4 horas de mecanizado secundario (ensamblado y barnizado). Análogamente, cada mesa del tipo 2 necesita 3 horas de mecanizado primario y 7 horas de mecanizado secundario. Las disponibilidades diarias de mecanizados primario y secundario son respectivamente de 40 y 56 horas-máquina. La venta de una mesa del tipo 1 reporta un beneficio de 70 euros, mientras que la venta de una mesa del tipo 2 de 90 euros.

	Tiempo de mecanizado (horas)		Disponibilidad diaria (horas-máquina)
Tipo de mesa	Tipo 1	Tipo 2	
Mecanizado primario	4	3	40
Mecanizado secundario	4	7	56
Beneficio (€)	70	90	

Solución

$$\text{\textit{Maximizar}} \qquad 70x_1 + 90x_2$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a las restricciones} \quad 4x_1 + 3x_2 &\leq 40 \\ 4x_1 + 7x_2 &\leq 56 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde

$$x_i = \text{Cantidad de mesas diarias a fabricar del tipo 1}$$

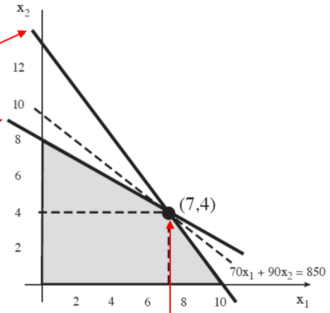
Solución : Problema del Carpintero

```
//Variables de decisión
dvar float+ x1;
dvar float+ x2;

//Función objetivo
maximize 70*x1+90*x2;

//Restricciones
subject to {
    4*x1 + 3*x2 <= 40;
    4*x1 + 7*x2 <= 56;
}
```

```
Final solution with objective 850:
x1 = 7;
x2 = 4;
```



ambas restricciones activas ⟶ ambos recursos plenamente utilizados

Solución : Problema del Carpintero

Entonces tenemos que la solución optima es

$$x_1^* = 7; \qquad x_2^* = 4$$

con valor objetivo máximo $z^* = 850$.

- ¿ Y si se aumenta la capacidad de horas-máquina en 8 horas por día ?
- ¿Cómo afecta esto a los beneficios ?
- ¿ En qué tipo de mesa conviene utilizar la capacidad extra ?

Solución : Problema del Carpintero

Opción 1: Resolver los 2 casos por separado y comparar.

Ambos deben

$$\textit{Maximizar} \qquad z = 70x_1 + 90x_2$$

Si usamos las 8 horas extra en el mecanizado primario obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad 4x_1 + 3x_2 &\leq 48 \\ 4x_1 + 7x_2 &\leq 56 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son $x_1 = 10.5$; $x_2 = 2$; con valor objetivo optimo $z = 915$.

Solución : Problema del Carpintero

Por lo tanto, el incremento en el beneficio Δz por cada 8 horas extra de mecanizado primario es de

$$\Delta z = 915 - 850 = 65.$$

Así, vemos que el parámetro de sensibilidad λ_1^* correspondería en este caso al incremento Δz por cada hora extra de mecanizado primario:

$$\lambda_1^* = \frac{\Delta z}{\Delta b_1} = \frac{65}{8} = 8.125 \text{ euros .}$$

Solución : Problema del Carpintero

Repitiendo pero ahora con el mecanizado secundario tenemos:

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad 4x_1 + 3x_2 &\leq 40 \\ 4x_1 + 7x_2 &\leq 64 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son $x_1 = 5.5$; $x_2 = 6$; con valor objetivo optimo $z = 925$.

Lo que nos entrega un incremento en el beneficio de 75 euros por cada 8 h-m, y un valor del parametro de sensibilidad asociado al mecanizado secundario de

$$\lambda_2^* = \frac{\Delta z}{\Delta b_2} = \frac{75}{8} = 9.375 \text{ euros} .$$

Es decir tenemos

$$\lambda^* = \begin{pmatrix} 8.125 \\ 9.375 \end{pmatrix}$$

Solución : Problema del Carpintero

Recordemos que habíamos definido

$$\lambda^{*t} = c_B^t (B^*)^{-1}.$$

En nuestro caso, $B^* = A$, y por lo tanto

$$(B^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$$

Y como $c_B^t = (70, 90)$, finalmente comprobamos que

$$\lambda^{*t} = (70, 90) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = (8.125, 9.375)$$

Resumiendo

- Si incrementamos 1 h-m el mecanizado *primario*, obtenemos un beneficio adicional de 8.125 euros al día.
- Si incrementamos 1 h-m el mecanizado *secundario*, obtenemos un beneficio adicional de 9.375 euros al día.
- En general, las **sensibilidades** nos indican el efecto en la función objetivo de los cambios en los recursos.
- Veremos que estas sensibilidades pueden obtenerse simultáneamente, resolviendo el **Problema Dual.**

Dualidad

Dado el siguiente problema **Primal**

$$\begin{aligned} Minimizar \quad z &= c^t x \\ s.a. \quad Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

el problema **Dual** asociado es

$$\begin{aligned} Maximizar \quad z &= b^t y \\ s.a. \quad A^t y &\leq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde $y^{*t} = (y_1, y_2, \ldots y_m)$ son las **variables duales**

Dualidad: Reglas

	Primal (Dual)	***Dual (Primal)***
Regla 1	Minimizar	Maximizar
Regla 2	Una variable ≥ 0	Una restricción de desigualdad ≤
Regla 3	Una variable ≤ 0	Una restricción de desigualdad ≥
Regla 4	Una variable no restringida en signo	Una restricción de igualdad
Regla 5	Una restricción de desigualdad ≤	Una variable ≤ 0
Regla 6	Una restricción de desigualdad ≥	Una variable ≥ 0
Regla 7	Una restricción de igualdad	Una variable no restringida en signo

Ejemplo

$$\begin{array}{rrcl} \textit{Minimizar} & z & = & x_1 + x_2 - x_3 \\ \textit{sujeto a} & 2x_1 + x_2 & & \geq 3 \\ & x_1 \quad\; - x_3 & & = 2 \\ & x_3 & & \geq 0 \end{array}$$

Dualidad: Reglas

$$\begin{array}{rlll} \textit{Minimizar} & z & = & x_1 + x_2 - x_3 \\ \textit{sujeto a} & 2x_1 + x_2 & & \geq 3 \\ & x_1 & - x_3 & = 2 \\ & & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

2 restricciones $\longrightarrow$ 2 variables duales y_1, y_2. Aplicando las reglas:

- Regla 1 $\longrightarrow$ Maximizar $3y_1 + 2y_2$
- x_1 y x_2 son irrestrictas: Regla 4 $\longrightarrow$ $\begin{array}{lll} 2y_1 & +y_2 & = 1 \\ y_1 & & = 1 \end{array}$
- $x_3 \geq 0$: Regla 2 $\longrightarrow -y_2 \leq -1$.

Dualidad: Reglas

Así, el Problema Dual es

$$\begin{array}{rccl}
\textit{Maximizar} & z & = & 3y_1 + 2y_2 \\
\textit{sujeto a} & 2y_1 + y_2 & & = 1 \\
 & y_1 & & = 1 \\
 & & -y_2 & \leq -1
\end{array}$$

Tarea: probar en este ejemplo que el Dual del Dual es el Primal.

Dualidad: Teoremas

Theorem (Dualidad Débil)

Sea x una sol. factible para un PL de minimización, y sea y una sol. facitible de su Dual. Entonces

$$b^t y \leq c^t x.$$

Corollary

Si $b^t \hat{y} = c^t \hat{x}$, entonces $x^* = \hat{x}$ e $y^* = \hat{y}$ son soluciones óptimas.

Theorem

Dualidad fuerte] Dado un programa lineal y su dual, una de las alternativas siguientes ocurre:

- *Ambos problemas tienen solución óptima y los valores objetivos óptimos coinciden,*
- *Uno de los problemas es NO acotado, y el otro tiene región factible VACÍA*

Dualidad: Problema del Carpintero

Recordemos el problema del carpintero:

$$\begin{array}{rrl} \text{Maximizar} & z & = 70x_1 + 90x_2 \\ \text{sujeto a} & 4x_1 + 3x_2 & \leq 40 \\ & 4x_1 + 7x_2 & \leq 56 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Aplicando las reglas, obtenemos el dual

$$\begin{array}{rrl} \text{Minimizar} & z & = 40y_1 + 56y_2 \\ \text{sujeto a} & 4y_1 + 4y_2 & \geq 70 \\ & 3y_1 + 7y_2 & \geq 90 \\ & y_1, y_2 & \geq 0 \end{array}$$

Dualidad: Problema del Carpintero

Al resolver el Dual obtenemos las soluciones:

$$y^t = (8.125, 9.375)$$

que corresponden a las **sensibilidades ya calculadas** !

Además, podemos recuperar la solución del Primal:

$$x^t = c^t A^{-1} = (40, 76) \left(\begin{array}{cc} 4 & 4 \\ 3 & 7 \end{array} \right)^{-1} = (7, 4)$$

Dualidad: Interpretación

	Tiempo de mecanizado (horas)		Disponibilidad diaria (horas-máquina)
Tipo de mesa	Tipo 1	Tipo 2	
Mecanizado primario	4	3	40
Mecanizado secundario	4	7	56
Beneficio (€)	70	90	

Suponga que el carpintero desea vender las horas de mecanizado. ¿Qué precio debe tener cada hora de cada tipo de mecanizado?

$$y_1 = \text{precio por hora de mecanizado primario}$$
$$y_1 = \text{precio por hora de mecanizado secundario}$$

Dualidad: Interpretación

	Tiempo de mecanizado (horas)		Disponibilidad diaria (horas-máquina)
Tipo de mesa	Tipo 1	Tipo 2	
Mecanizado primario	4	3	40
Mecanizado secundario	4	7	56
Beneficio (€)	70	90	

- El carpintero quiere ser competitivo, y vender al mínimo precio posible

$$\text{Minimizar } z = 40y_1 + 56y_2$$

- El carpintero quiere obtener como mínimo el beneficio que obtendría haciendo y vendiendo los muebles:

$$\begin{aligned} 4y_1 + 4y_2 &\geq 70 \\ 3y_1 + 7y_2 &\geq 90. \end{aligned}$$

- Los precios deben ser no negativos: $y_1, y_2 \geq 0$.