Método SIMPLEX

MLG521

Profesor: Cristóbal Rojas

Departamento de Ciencias de de la Ingeniería
Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad Andrés Bello
Curso dictado en conjunto con Pamela Álvarez

MLG521

Programación Lineal

Vamos a resolver problemas de la siguiente forma:

Problema Lineal

$$Min\ c^t x \tag{1}$$

$$s.a\ Ax = b \tag{2}$$

$$x \geq 0 \tag{3}$$

Variables de Holgura

- Si existe una restricción de la forma $a^t x \leq d$ agregamos una variable positiva s y reemplazamos la restricción por $a^t x + s = d$.
- Si existe una restricción de la forma $a^t x \geq d$ agregamos una variable positiva s y reemplazamos la restricción por $a^t x - s = d$.
- Si la variable x_i es irrestricta, agregamos las variables positivas s_1, s_2 y reemplazamos x_i por $s_1 - s_2$.

Variables de Holgura

- Si existe una restricción de la forma $a^t x \leq d$ agregamos una variable positiva s y reemplazamos la restricción por $a^t x + s = d$.
- Si existe una restricción de la forma $a^t x \geq d$ agregamos una variable positiva s y reemplazamos la restricción por $a^t x - s = d$.
- Si la variable x_i es irrestricta, agregamos las variables positivas s_1, s_2 y reemplazamos x_i por $s_1 - s_2$.

Variables de Holgura

- Si existe una restricción de la forma $a^t x \leq d$ agregamos una variable positiva s y reemplazamos la restricción por $a^t x + s = d$.
- Si existe una restricción de la forma $a^t x \geq d$ agregamos una variable positiva s y reemplazamos la restricción por $a^t x - s = d$.
- Si la variable x_i es irrestricta, agregamos las variables positivas s_1, s_2 y reemplazamos x_i por $s_1 - s_2$.

Soluciones Básicas

A tiene m filas y n columnas. (Asumiremos $m < n$).

Sea B una matriz construida con m columnas l.i. de A. Mas aún, supongamos que $A = [B|R]$. Entonces tenemos que:

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Rx_R = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R$$

Solución básica factible para $Ax = b, x \geq 0$.

Decimos que x es una solución básica factible cuando

$$x_B = B^{-1}b \quad \text{y} \quad x_B \geq 0.$$

Note que en este caso $x_R = 0$.

Soluciones Básicas

A tiene m filas y n columnas. (Asumiremos $m < n$).

Sea B una matriz construida con m columnas l.i. de A. Mas aún, supongamos que $A = [B|R]$. Entonces tenemos que:

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Rx_R = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R$$

Solución básica factible para $Ax = b, x \geq 0$.

Decimos que x es una solución básica factible cuando

$$x_B = B^{-1}b \quad \text{y} \quad x_B \geq 0.$$

Note que en este caso $x_R = 0$.

Soluciones Básicas

A tiene m filas y n columnas. (Asumiremos $m < n$).

Sea B una matriz construida con m columnas l.i. de A. Mas aún, supongamos que $A = [B|R]$. Entonces tenemos que:

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Rx_R = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R$$

Solución básica factible para $Ax = b, x \geq 0$.

Decimos que x es una solución básica factible cuando

$$x_B = B^{-1}b \quad \text{y} \quad x_B \geq 0.$$

Note que en este caso $x_R = 0$.

Soluciones Básicas

A tiene m filas y n columnas. (Asumiremos $m < n$).

Sea B una matriz construida con m columnas l.i. de A. Mas aún, supongamos que $A = [B|R]$. Entonces tenemos que:

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Rx_R = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R$$

Solución básica factible para $Ax = b, x \geq 0$.

Decimos que x es una solución básica factible cuando

$$x_B = B^{-1}b \quad \text{y} \quad x_B \geq 0.$$

Note que en este caso $x_R = 0$.

Soluciones Básicas

A tiene m filas y n columnas. (Asumiremos $m < n$).

Sea B una matriz construida con m columnas l.i. de A. Mas aún, supongamos que $A = [B|R]$. Entonces tenemos que:

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Rx_R = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R$$

Solución básica factible para $Ax = b, x \geq 0$.

Decimos que x es una solución básica factible cuando

$$x_B = B^{-1}b \quad \text{y} \quad x_B \geq 0.$$

Note que en este caso $x_R = 0$.

Soluciones Básicas

A tiene m filas y n columnas. (Asumiremos $m < n$).

Sea B una matriz construida con m columnas l.i. de A. Mas aún, supongamos que $A = [B|R]$. Entonces tenemos que:

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Rx_R = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R$$

Solución básica factible para $Ax = b, x \geq 0$.

Decimos que x es una solución básica factible cuando

$$x_B = B^{-1}b \quad \text{y} \quad x_B \geq 0.$$

Note que en este caso $x_R = 0$.

Puntos extremos

Teorema

Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : AX = b, x \geq 0\}$ un poliedro. Entonces:

x es un punto extremo de $P \iff x$ es una solución básica factible

Puntos extremos

Teorema

Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : AX = b, x \geq 0\}$ un poliedro. Entonces:

$$x \text{ es un punto extremo de } P \iff x \text{ es una solución básica factible}$$

Puntos extremos

Teorema

Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : AX = b, x \geq 0\}$ un poliedro. Entonces:

$$x \text{ es un punto extremo de } P \iff x \text{ es una solución básica factible}$$

Costos reducidos

Llamemos $\overline{R}$ a la matriz $B^{-1}R$ y $\overline{b}$ a $B^{-1}b$. Entonces

$$x_B = \overline{b} - \overline{R}x_R.$$

Estudiemos que pasa con la función objetivo:

$$\begin{aligned} z = c^t x &= c_B^t x_B + c_R^t x_R \\ &= c_B^t(\overline{b} - \overline{R}x_R) + c_R^t x_R \\ &= c_B^t \overline{b} + (c_R - \overline{R}c_B)^t x_R \end{aligned}$$

Definimos los costos reducidos como $c_r^t = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$. Luego se tiene que la función objetivo queda de la forma:

$$c_B^t \overline{b} + c_r^t x_R$$

¿Qué sucede para una solución básica factible?

Costos reducidos

Llamemos $\overline{R}$ a la matriz $B^{-1}R$ y $\overline{b}$ a $B^{-1}b$. Entonces

$$x_B = \overline{b} - \overline{R}x_R.$$

Estudiemos que pasa con la función objetivo:

$$\begin{aligned} z = c^t x &= c_B^t x_B + c_R^t x_R \\ &= c_B^t(\overline{b} - \overline{R}x_R) + c_R^t x_R \\ &= c_B^t \overline{b} + (c_R - \overline{R}c_B)^t x_R \end{aligned}$$

Definimos los costos reducidos como $c_r^t = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$. Luego se tiene que la función objetivo queda de la forma:

$$c_B^t \overline{b} + c_r^t x_R$$

¿Qué sucede para una solución básica factible?

Costos reducidos

Llamemos $\overline{R}$ a la matriz $B^{-1}R$ y $\overline{b}$ a $B^{-1}b$. Entonces

$$x_B = \overline{b} - \overline{R}x_R.$$

Estudiemos que pasa con la función objetivo:

$$\begin{aligned} z = c^t x &= c_B^t x_B + c_R^t x_R \\ &= c_B^t(\overline{b} - \overline{R}x_R) + c_R^t x_R \\ &= c_B^t \overline{b} + (c_R - \overline{R}c_B)^t x_R \end{aligned}$$

Definimos los costos reducidos como $c_r^t = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$. Luego se tiene que la función objetivo queda de la forma:

$$c_B^t \overline{b} + c_r^t x_R$$

¿Qué sucede para una solución básica factible?

Costos reducidos

Llamemos $\overline{R}$ a la matriz $B^{-1}R$ y $\overline{b}$ a $B^{-1}b$. Entonces

$$x_B = \overline{b} - \overline{R}x_R.$$

Estudiemos que pasa con la función objetivo:

$$\begin{aligned} z = c^t x &= c_B^t x_B + c_R^t x_R \\ &= c_B^t(\overline{b} - \overline{R}x_R) + c_R^t x_R \\ &= c_B^t \overline{b} + (c_R - \overline{R}c_B)^t x_R \end{aligned}$$

Definimos los costos reducidos como $c_r^t = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$. Luego se tiene que la función objetivo queda de la forma:

$$c_B^t \overline{b} + c_r^t x_R$$

¿Qué sucede para una solución básica factible?

Costos reducidos

Llamemos $\overline{R}$ a la matriz $B^{-1}R$ y $\overline{b}$ a $B^{-1}b$. Entonces

$$x_B = \overline{b} - \overline{R}x_R.$$

Estudiemos que pasa con la función objetivo:

$$\begin{aligned} z = c^t x &= c_B^t x_B + c_R^t x_R \\ &= c_B^t(\overline{b} - \overline{R}x_R) + c_R^t x_R \\ &= c_B^t \overline{b} + (c_R - \overline{R}c_B)^t x_R \end{aligned}$$

Definimos los costos reducidos como $c_r^t = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$. Luego se tiene que la función objetivo queda de la forma:

$$c_B^t \overline{b} + c_r^t x_R$$

¿Qué sucede para una solución básica factible?

Criterio de Optimalidad

Solución óptima

Si una solución básica factible tiene sus costos reducidos positivos entonces es una solución óptima.

¿Qué ocurre si existe una coordenada negativa?

Criterio de Optimalidad

Solución óptima

Si una solución básica factible tiene sus costos reducidos positivos entonces es una solución óptima.

¿Qué ocurre si existe una coordenada negativa?

Criterio de Optimalidad

Solución óptima

Si una solución básica factible tiene sus costos reducidos positivos entonces es una solución óptima.

¿Qué ocurre si existe una coordenada negativa?

Solución Adyacente

Recordemos que $x_B = \overline{b} - \overline{R}x_R$.
Supongamos que aumentamos ϵ en la coordenada j, entonces:

$$x_B = \overline{b} - \overline{R}_{.j}\epsilon$$

¿Cuánto podemos aumentar? Se tiene que:

$$\epsilon_{max} = min_{i \in I}\left\{\frac{\overline{b_i}}{\overline{a_{ij}}} : \overline{a_{ij}} > 0\right\}$$

Solución Adyacente

Recordemos que $x_B = \overline{b} - \overline{R}x_R$.
Supongamos que aumentamos ϵ en la coordenada j, entonces:

$$x_B = \overline{b} - \overline{R}_{.j}\epsilon$$

¿Cuánto podemos aumentar? Se tiene que:

$$\epsilon_{max} = min_{i \in I} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\overline{a_{ij}}} : \overline{a_{ij}} > 0 \right\}$$

Solución Adyacente

Recordemos que $x_B = \overline{b} - \overline{R}x_R$.
Supongamos que aumentamos ϵ en la coordenada j, entonces:

$$x_B = \overline{b} - \overline{R}_{.j}\epsilon$$

¿Cuánto podemos aumentar? Se tiene que:

$$\epsilon_{max} = min_{i \in I} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{a_{ij}}} : \overline{a_{ij}} > 0 \right\}$$

Solución Adyacente

Solución adyacente

La solución $x_B^* = \overline{b} - \overline{R}_{.j}\epsilon_{max}$ es una solución básica factible adyacente a x_B.
Note que la nueva base corresponde a agregar la columna j y eliminar la columna i donde se alcanza el ϵ_{max}.

SIMPLEX

Ordenando lo anterior obtenemos un algoritmo:

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
4. ¿Es óptimo?.
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{rj} = min_i c_{ri}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

SIMPLEX

Ordenando lo anterior obtenemos un algoritmo:

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
4. ¿Es óptimo?.
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{r\,j} = min_i c_{r\,i}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

SIMPLEX

Ordenando lo anterior obtenemos un algoritmo:

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
4. ¿Es óptimo?.
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{r\,j} = min_i c_{r\,i}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

SIMPLEX

Ordenando lo anterior obtenemos un algoritmo:

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
4. ¿Es óptimo?.
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{rj} = min_i c_{ri}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

SIMPLEX

Ordenando lo anterior obtenemos un algoritmo:

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
4. ¿Es óptimo?.
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{r\,j} = min_i c_{r\,i}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

SIMPLEX

Ordenando lo anterior obtenemos un algoritmo:

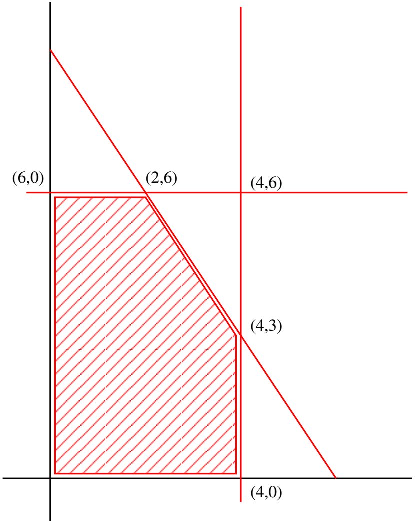
1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
4. ¿Es óptimo?.
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{r\,j} = min_i c_{r\,i}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

SIMPLEX

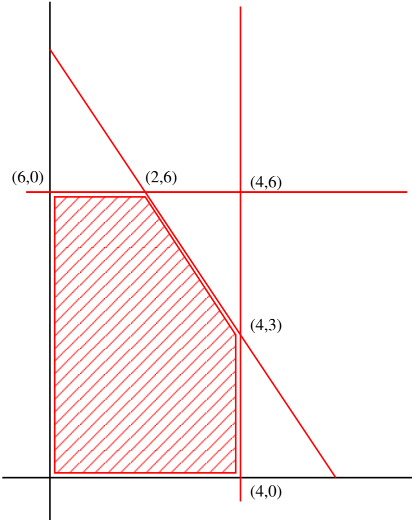
Ordenando lo anterior obtenemos un algoritmo:

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
4. ¿Es óptimo?.
5. Si no, determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_{r\,j} = min_i c_{r\,i}$.
6. Determinar la columna que sale.
7. Actualizar base y volver a (1).

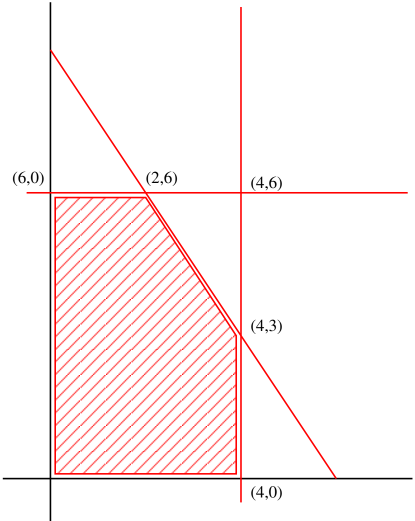
Ejemplo



Ejemplo



Ejemplo

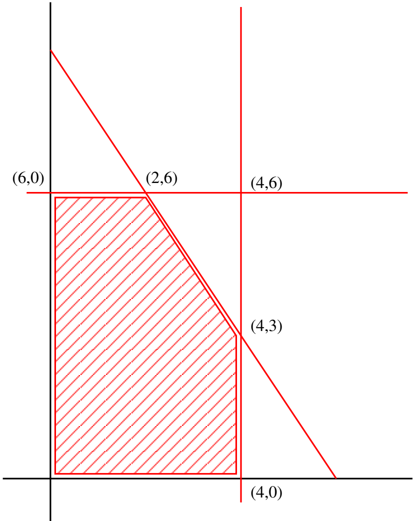


$$Min - 3x_1 - 5x_2$$

s.a

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & \leq & 4 \\ & x_2 & \leq & 6 \\ 3x_1 + & 2x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

Ejemplo

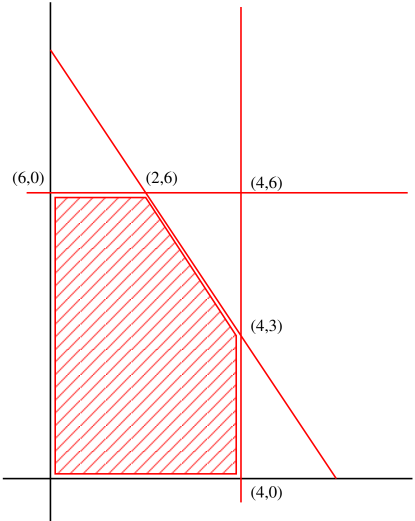


$$Min - 3x_1 - 5x_2$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & s_1 & = & 4 \\ & & x_2 & + & s_2 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & s_3 & = & 18 \end{array}$$

Ejemplo



$$Min - 3x_1 - 5x_2$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & s_1 & = & 4 \\ & & x_2 & + & s_2 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$Min - 3x_1 - 5x_2$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & s_1 & = & 4 \\ & & x_2 & + & s_2 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$Min - 3x_1 - 5x_2$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & s_1 & = & 4 \\ & & x_2 & + & s_2 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & s_3 & = & 18 \end{array}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

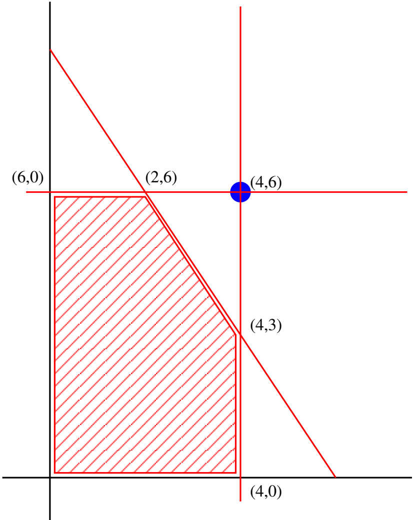
$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo



$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

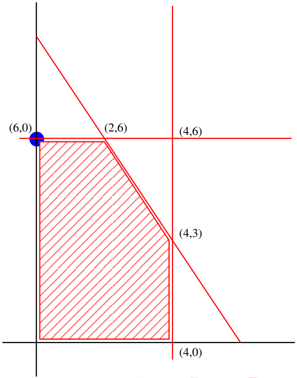
1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$



Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_r = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_r = \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_r = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_r = \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_r = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_r = \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Entra variable x_1

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}_1 = B^{-1} A_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}_1 = B^{-1}A_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{6}{3} \right\} = 2$$

Luego sale la variable s_3.

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

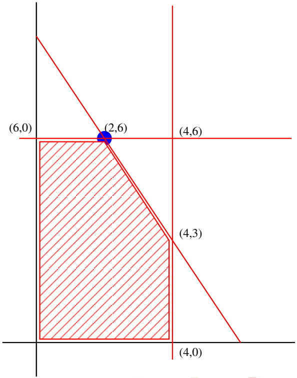
1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$x_{B'} = B'^{-1} b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$x_{B'} = B'^{-1}b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_r = \begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

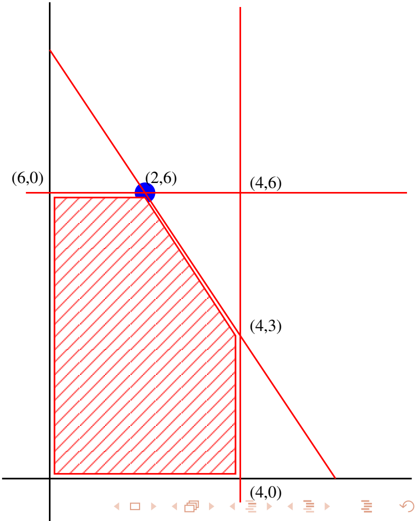
$$c_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_r = \begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

1. Determinar B y calcular B^{-1}.
2. Calcular solución básica factible asociada $x_B = B^{-1}b$.
3. ¿Es factible?
4. Calcular costos reducidos $c_r = c_R^t - c_B^t B^{-1} R$.
5. ¿Es óptimo?.
6. Determinar columna que entra a la base, es decir j, tal que $c_j = \min_i c_i$.
7. Determinar la columna que sale.
8. Volver a (1).



Interpretación soluciones

- Cuando no se puede escoger una variable básica que salga, significa que el problema es no acotado.
- Cuando aparece un 0 en x_B, significa que la solución es degenerada.
- La interpretación geométrica de soluciones degeneradas, es que hay una intersección de más hiperplanos que la dimensión del problema.

Interpretación soluciones

- Cuando no se puede escoger una variable básica que salga, significa que el problema es no acotado.
- Cuando aparece un 0 en x_B, significa que la solución es degenerada.
- La interpretación geométrica de soluciones degeneradas, es que hay una intersección de más hiperplanos que la dimensión del problema.

Interpretación soluciones

- Cuando no se puede escoger una variable básica que salga, significa que el problema es no acotado.
- Cuando aparece un 0 en x_B, significa que la solución es degenerada.
- La interpretación geométrica de soluciones degeneradas, es que hay una intersección de más hiperplanos que la dimensión del problema.

Eficiencia Computacional

- El número de soluciones básicas es finito, por lo tanto si el problema no es degenerado, SIMPLEX siempre termina.
- Podría tener que recorrer todos los vértices.
- Existen métodos que aseguran terminara más rápido. (Método elipsoidal, algoritmos de punto interior).
- Aun asi, en la mayoria de los casos SIMPLEX es la mejor opción.
- Cuando aparecen soluciones degeneradas el algoritmo podría ciclar. Para evitar ciclos se debe implementar una regla especial para escoger las soluciones adyacentes.

Eficiencia Computacional

- El número de soluciones básicas es finito, por lo tanto si el problema no es degenerado, SIMPLEX siempre termina.
- Podría tener que recorrer todos los vértices.
- Existen métodos que aseguran terminara más rápido. (Método elipsoidal, algoritmos de punto interior).
- Aun asi, en la mayoria de los casos SIMPLEX es la mejor opción.
- Cuando aparecen soluciones degeneradas el algoritmo podría ciclar. Para evitar ciclos se debe implementar una regla especial para escoger las soluciones adyacentes.

Eficiencia Computacional

- El número de soluciones básicas es finito, por lo tanto si el problema no es degenerado, SIMPLEX siempre termina.
- Podría tener que recorrer todos los vértices.
- Existen métodos que aseguran terminara más rápido. (Método elipsoidal, algoritmos de punto interior).
- Aun asi, en la mayoria de los casos SIMPLEX es la mejor opción.
- Cuando aparecen soluciones degeneradas el algoritmo podría ciclar. Para evitar ciclos se debe implementar una regla especial para escoger las soluciones adyacentes.

Eficiencia Computacional

- El número de soluciones básicas es finito, por lo tanto si el problema no es degenerado, SIMPLEX siempre termina.
- Podría tener que recorrer todos los vértices.
- Existen métodos que aseguran terminara más rápido. (Método elipsoidal, algoritmos de punto interior).
- Aun asi, en la mayoria de los casos SIMPLEX es la mejor opción.
- Cuando aparecen soluciones degeneradas el algoritmo podría ciclar. Para evitar ciclos se debe implementar una regla especial para escoger las soluciones adyacentes.

Eficiencia Computacional

- El número de soluciones básicas es finito, por lo tanto si el problema no es degenerado, SIMPLEX siempre termina.
- Podría tener que recorrer todos los vértices.
- Existen métodos que aseguran terminara más rápido. (Método elipsoidal, algoritmos de punto interior).
- Aun asi, en la mayoria de los casos SIMPLEX es la mejor opción.
- Cuando aparecen soluciones degeneradas el algoritmo podría ciclar. Para evitar ciclos se debe implementar una regla especial para escoger las soluciones adyacentes.

Primera solución básica fáctible

- Para aplicar SIMPLEX necesitamos partir de una solución básica fáctible.
- ¿Cómo encontramos esta solución?
- Método de las dos fases.

$$Min \sum t_i$$

s.a

$$Ax + t = b$$

$$x, t \geq 0$$

Primera solución básica fáctible

- Para aplicar SIMPLEX necesitamos partir de una solución básica fáctible.
- ¿Cómo encontramos esta solución?
- Método de las dos fases.

$$Min \sum t_i$$

s.a

$$Ax + t = b$$

$$x, t \geq 0$$

Primera solución básica fáctible

- Para aplicar SIMPLEX necesitamos partir de una solución básica fáctible.
- ¿Cómo encontramos esta solución?
- Método de las dos fases.

$$Min \sum t_i$$

s.a

$$Ax + t = b$$

$$x, t \geq 0$$

Ejemplo

$$Min - 6x_1 - 4x_2$$

s.a

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 2x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ejemplo

$$Min - 6x_1 - 4x_2$$

s.a

$$\begin{array}{rcccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 2x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ejemplo

$$Min - 6x_1 - 4x_2$$

s.a

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 2x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$Min - 6x_1 - 4x_2$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & s_1 & = & 10 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & s_2 & = & 4 \\ & & x_1, x_2 & , & s_1, s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ejemplo

$$Min - 6x_1 - 4x_2$$

s.a

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1+ & x_2+ & s_1 & & = & 10 \\ 2x_1+ & x_2- & s_2+ & t_1 & = & 4 \\ & x_1, x_2, & s_1, s_2 & t_1 & \geq & 0 \end{array}$$

$$Min - 6x_1 - 4x_2$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & s_1 & = & 10 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & s_2 & = & 4 \\ & & x_1, x_2 & , & s_1, s_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ejemplo

$$Min -6x_1 - 4x_2$$

s.a

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1+ & x_2+ & s_1 & & = & 10 \\ 2x_1+ & x_2- & s_2+ & t_1 & = & 4 \\ & x_1, x_2, & s_1, s_2 & t_1 & \geq & 0 \end{array}$$

$$Min\ t_1$$

s.a

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1+ & x_2+ & s_1 & & = & 10 \\ 2x_1+ & x_2- & s_2+ & t_1 & = & 4 \\ & x_1, x_2, & s_1, s_2 & t_1 & \geq & 0 \end{array}$$

Ejemplo

- El problema original admite solución fáctible si y sólo si el valor óptimo del problema de Fase I es 0.
- Si la base óptima de Fase I no contiene variables artificiales encontramos una solución básica factible para el problema original.
- Si la base óptima de Fase I contiene variables artificiales, estamos en una solución degenerada y debemos tratar de cambiarla por una variable del problema original.

$$Min\ t_1$$

s.a

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1+ & x_2+ & s_1 & & = & 10 \\ 2x_1+ & x_2- & s_2+ & t_1 & = & 4 \\ & x_1, x_2, & s_1, s_2 & t_1 & \geq & 0 \end{array}$$

Dualidad

- Dado el siguiente problema:

$$Max\ 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & x_1 & , & x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Dualidad

- Dado el siguiente problema:

$$Max\ 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & x_1 & , & x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- Se tiene que $(1, 0, 0)$ es una solución fáctible, por lo tanto, si evaluamos la función objetivo en este punto (4) obtenemos una cota inferior del valor óptimo.
- ¿Podemos mejorar la cota?

Dualidad

- Dado el siguiente problema:

$$Max\ 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & x_1 & , & x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- ¿Podemos encontrar cotas superiores de la función objetivo?

Dualidad

- Dado el siguiente problema:

$$Max\ 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & x_1 & , & x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- ¿Podemos encontrar cotas superiores de la función objetivo?
- Usemos las restricciones. Sean $y_1, y_2 \geq 0$. Luego:

$$\begin{array}{rcl} y_1(x_1 + 4x_2) & \leq & y_1 \\ y_2(3x_1 - x_2 + x_3) & \leq & 3y_2 \end{array}$$

Dualidad

- Dado el siguiente problema:

$$Max\ 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & x_1 & , & x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- Usemos las restricciones. Sean $y_1, y_2 \geq 0$. Luego:

$$\begin{aligned} y_1(x_1 + 4x_2) &\leq y_1 \\ y_2(3x_1 - x_2 + x_3) &\leq 3y_2 \end{aligned}$$

- Sumando obtenemos que:

$$(y_1 + 3y_2)x_1 + (4y_1 - y_2)x_2 + y_2x_3 \leq y_1 + 3y_2$$

Dualidad

- Dado el siguiente problema:

$$Max\ 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & x_1 & , & x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- Sumando obtenemos que:

$$(y_1 + 3y_2)x_1 + (4y_1 - y_2)x_2 + y_2x_3 \leq y_1 + 3y_2$$

- Si imponemos las condiciones:

$$\begin{array}{rcl} (y_1 + 3y_2) & \geq & 4 \\ (4y_1 - y_2) & \geq & 1 \\ y_2 & \geq & 3 \end{array}$$

Dualidad

- Dado el siguiente problema:

$$Max\ 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & x_1 & , & x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- Sumando obtenemos que:

$$(y_1 + 3y_2)x_1 + (4y_1 - y_2)x_2 + y_2x_3 \leq y_1 + 3y_2$$

- Si imponemos las condiciones:

$$\begin{array}{rcl} (y_1 + 3y_2) & \geq & 4 \\ (4y_1 - y_2) & \geq & 1 \\ y_2 & \geq & 3 \end{array}$$

- Se tiene que:

$$4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq y_1 + 3y_2$$

Dualidad

- Dado el siguiente problema:

$$Max\ 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & x_1 & , & x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- Sumando obtenemos que:

$$(y_1 + 3y_2)x_1 + (4y_1 - y_2)x_2 + y_2x_3 \leq y_1 + 3y_2$$

- Si imponemos las condiciones:

$$\begin{array}{rcl} (y_1 + 3y_2) & \geq & 4 \\ (4y_1 - y_2) & \geq & 1 \\ y_2 & \geq & 3 \end{array}$$

- Se tiene que:

$$4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq y_1 + 3y_2$$

Dualidad

- Dado el siguiente problema:

$$Max\ 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

s.a

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & x_1 & , & x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- Si queremos la mejor cota debemos resolver el problema dual:

$$Min\ y_1 + 3y_2$$

s.a.

$$\begin{array}{rcl} (y_1 + 3y_2) & \geq & 4 \\ (4y_1 - y_2) & \geq & 1 \\ y_2 & \geq & 3 \\ y_1, y-2, y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Transformaciones primal-dual

Supongamos que el primal es un problema de maximización y el dual es de minimización, entonces:

- Por cada restricción del primal definimos una variable del dual.
  - Si la restricción es $\leq$ entonces la variable es ≥ 0.
  - Si la restricción es $\geq$ entonces la variable es ≤ 0
  - Si la restricción es $=$ entonces la variable es irrestricta.
- Por cada variable del primal se define una restricción en el dual.
  - Si la variable es ≥ 0 la restricción es $\geq$.
  - Si la variable es ≤ 0 entonces la restricción es $\leq$
  - Si la variable es irrestricta entonces la restricción es $=$.

Transformaciones primal-dual

Supongamos que el primal es un problema de maximización y el dual es de minimización, entonces:

- Por cada restricción del primal definimos una variable del dual.
  - Si la restricción es $\leq$ entonces la variable es ≥ 0.
  - Si la restricción es $\geq$ entonces la variable es ≤ 0
  - Si la restricción es $=$ entonces la variable es irrestricta.
- Por cada variable del primal se define una restricción en el dual.
  - Si la variable es ≥ 0 la restricción es $\geq$.
  - Si la variable es ≤ 0 entonces la restricción es $\leq$
  - Si la variable es irrestricta entonces la restricción es $=$.

Transformaciones primal-dual

Supongamos que el primal es un problema de maximización y el dual es de minimización, entonces:

- Por cada restricción del primal definimos una variable del dual.
  - Si la restricción es $\leq$ entonces la variable es ≥ 0.
  - Si la restricción es $\geq$ entonces la variable es ≤ 0
  - Si la restricción es $=$ entonces la variable es irrestricta.
- Por cada variable del primal se define una restricción en el dual.
  - Si la variable es ≥ 0 la restricción es $\geq$.
  - Si la variable es ≤ 0 entonces la restricción es $\leq$
  - Si la variable es irrestricta entonces la restricción es $=$.

Transformaciones primal-dual

Supongamos que el primal es un problema de maximización y el dual es de minimización, entonces:

- Por cada restricción del primal definimos una variable del dual.
  - Si la restricción es $\leq$ entonces la variable es ≥ 0.
  - Si la restricción es $\geq$ entonces la variable es ≤ 0
  - Si la restricción es $=$ entonces la variable es irrestricta.
- Por cada variable del primal se define una restricción en el dual.
  - Si la variable es ≥ 0 la restricción es $\geq$.
  - Si la variable es ≤ 0 entonces la restricción es $\leq$
  - Si la variable es irrestricta entonces la restricción es $=$.

Transformaciones primal-dual

Supongamos que el primal es un problema de maximización y el dual es de minimización, entonces:

- Por cada restricción del primal definimos una variable del dual.
  - Si la restricción es $\leq$ entonces la variable es ≥ 0.
  - Si la restricción es $\geq$ entonces la variable es ≤ 0
  - Si la restricción es $=$ entonces la variable es irrestricta.
- Por cada variable del primal se define una restricción en el dual.
  - Si la variable es ≥ 0 la restricción es $\geq$.
  - Si la variable es ≤ 0 entonces la restricción es $\leq$
  - Si la variable es irrestricta entonces la restricción es $=$.

Transformaciones primal-dual

Supongamos que el primal es un problema de maximización y el dual es de minimización, entonces:

- Por cada restricción del primal definimos una variable del dual.
  - Si la restricción es $\leq$ entonces la variable es ≥ 0.
  - Si la restricción es $\geq$ entonces la variable es ≤ 0
  - Si la restricción es $=$ entonces la variable es irrestricta.
- Por cada variable del primal se define una restricción en el dual.
  - Si la variable es ≥ 0 la restricción es $\geq$.
  - Si la variable es ≤ 0 entonces la restricción es $\leq$
  - Si la variable es irrestricta entonces la restricción es $=$.

Transformaciones primal-dual

Supongamos que el primal es un problema de maximización y el dual es de minimización, entonces:

- Por cada restricción del primal definimos una variable del dual.
  - Si la restricción es $\leq$ entonces la variable es ≥ 0.
  - Si la restricción es $\geq$ entonces la variable es ≤ 0
  - Si la restricción es $=$ entonces la variable es irrestricta.
- Por cada variable del primal se define una restricción en el dual.
  - Si la variable es ≥ 0 la restricción es $\geq$.
  - Si la variable es ≤ 0 entonces la restricción es $\leq$
  - Si la variable es irrestricta entonces la restricción es $=$.

Transformaciones primal-dual

Supongamos que el primal es un problema de maximización y el dual es de minimización, entonces:

- Por cada restricción del primal definimos una variable del dual.
  - Si la restricción es $\leq$ entonces la variable es ≥ 0.
  - Si la restricción es $\geq$ entonces la variable es ≤ 0
  - Si la restricción es $=$ entonces la variable es irrestricta.
- Por cada variable del primal se define una restricción en el dual.
  - Si la variable es ≥ 0 la restricción es $\geq$.
  - Si la variable es ≤ 0 entonces la restricción es $\leq$
  - Si la variable es irrestricta entonces la restricción es $=$.

Teoremas de dualidad

Teorema Debil

Si el problema primal es de maximización, entonces para todo x solución fáctible del primal y y solución fácrible de dual se tiene que:

$$z(x) \leq z'(y)$$

Teorema Fuerte

El primal tiene solución óptima si y sólo si el dual tiene solución óptima. Mas aún, el valor óptimo es el mismo para ambos problemas.

Teoremas de dualidad

Teorema Debil

Si el problema primal es de maximización, entonces para todo x solución fáctible del primal y y solución fácrible de dual se tiene que:

$$z(x) \leq z'(y)$$

Teorema Fuerte

El primal tiene solución óptima si y sólo si el dual tiene solución óptima. Mas aún, el valor óptimo es el mismo para ambos problemas.