Modelación

Cristóbal Rojas

Universidad Andrés Bello
Santiago, Chile.

Curso co-dictado con Pamela Alvarez.

March 29, 2017

¿Que es la modelación matemática??

Modelo:

Es una representación matemática de los modos esenciales que determinan el funcionamiento o comportamiento de algún fenómeno observado, en relación a ciertos aspectos que se desea entender, generalmente para dar respuesta a una pregunta o tomar una decisión.

- La **Modelación** es el oficio de construir modelos matemáticos que permitan plantear y estudiar, rigurosamente, ciertos problemas o fenómenos de interés.

Ejemplo

Se dispone de 100 mt de alambrado, y se desea construir una cerca que encierre la mayor superficie posible.

qué aspectos son relevantes?

- El tipo de alambrado ?
- El tipo de terreno a encerrar ?
- La forma del cerco ?

Simplificaciones: supongamos que el cerco será cuadrado. Sean A y L el ancho y el largo del cerco. Queremos:

- construir una cerca que encierre la mayor superficie posible: maximizar $A \cdot L$
- Utilizar solamente 100 mt de alambrado: $2A + 2L \leq 100$.

Modelo general

Modelo

$$Min\ f(x)$$

$$s.a. \quad g_i(x) \leq 0 \ \ \forall i = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

$$x \in C$$

Modelo Lineal

Problema Lineal – forma standard

$$Min\ cx + hy \tag{1}$$

$$s.a\ Ax + Gy \leq b \tag{2}$$

$$x \in \mathbb{Z}^n, y \in \mathbb{R}^p \tag{3}$$

- x, y son las variables del problema.
- Es un problema mixto.
- (1) es la función objetivo.
- (2) son restricciones lineales del dominio.
- (3) son las restricciones de integrabilidad.
- El conjunto de pares (x, y) que satisfacen (2) y (3) es el conjunto factible.
- Si no hay soluciones factibles, el problema se dice infactible.

Observaciones

- Restricciones de igualdad y mayor igual también pueden ser escritas en la forma standard.
- Un problema factible podría no tener solución óptima.
- Resolver una instancia $\sim$ determinar si esta es: Infactible, No acotada, óptima.

Modelos Lineales continuos

Ejemplos de como modelamos distintas situaciones con variables positivas continuas.

- Por cada 3 unidades de A deben haber al menos 9 unidades de B.
- Sean x_A y x_B las unidades de A y B respectivamente:

$$\frac{1}{3}x_A \leq \frac{1}{9}x_B$$

- Una fabrica puede producir 5 unidades de A, o 7 de B o 10 de C por semana. ¿Qué combinaciones de A, B y C se pueden fabricar en una semana ?. (una unidad de A toma $1/5$ de semana, etc. . .)
-

$$\frac{1}{5}x_A + \frac{1}{7}x_B + \frac{1}{10}x_C \leq 1$$

Modelos Lineales continuos

- En una mezcla el componente A debe ser al menos un 30% de la mezcla total de A, B y C.
- $$x_A \geq 0,3(x_A + x_B + x_C)$$

Ejemplo

El problema de la dieta

- 3 tipos de alimentos: A_1, A_2, A_3 con precios c_1, c_2 y c_3 respectivamente.
- Composición por unidad de alimento:

$$A_1: \quad 1\, proteina; \;\; 1\, hierro \;\; 1\, grasa$$

$$A_2: \quad 3\, proteina; \;\; 2\, hierro \;\; 3\, grasa$$

$$A_3: \quad 1\, proteina; \;\; 3\, hierro \;\; 2\, grasa$$

Requerimientos del menú:

- al menos 12 unidades de proteinas,
- al menos 8 unidades de hierro
- no mas de 10 unidades de grasa

¿Cuántas unidades de cada alimento se deben usar para minimizar el costo de un menú que cumpla los requerimientos?

Variables Binarias

Variable Binaria

Las variables binarias modelan eventos excluyentes. (Ej: invertir o no en una acción).

$$x = \begin{cases} 1 & \text{si el evento ocurre} \\ 0 & \text{si el evento no ocurre} \end{cases}$$

También suelen ser útiles para modelar expresiones lógicas requeridas en la descripción de las restricciones del problema.

Problema del cliente en el supermercado

Un cliente en un supermercado tiene $\$M$ para gastar. Debe determinar, entre n diferentes items, qué cantidad llevar de cada uno. El item i tiene un valor c_i para el cliente, y un precio de $\$p_i$. ¿Qué combinación de items debe llevar para maximizar el valor?

Sea x_i la cantidad del item i.

$$\begin{aligned} Max \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ s.a \quad & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq M \\ & x_i \in \{0,1\} \ \forall \ i \end{aligned}$$

¿qué problema le interesa resolver al supermercado?
(descubrir los valores c_i para cada cliente, y maximizar los precios)

Problema de Asignación

Tenemos m trabajos y n personas a las cuales asignarlos ($m \leq n$). Cada trabajo debe ser asignado a una persona, y cada persona solo puede hacer un trabajo. El costo de asignar el trabajo j a la persona i es c_{ij}. Buscamos la asignación de trabajos a menor costo.

$$
\begin{array}{lll}
 & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} & \\
s.a & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\} \\
 & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 & \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\} \forall \ i, j &
\end{array}
$$

Modelando relaciones y expresiones lógicas

Sean x_1, x_2 dos variables binarias que representan ciertos eventos. ¿Cómo modelamos las siguientes situaciones?

- A lo más uno de los eventos puede ocurrir.
- $$x_1 + x_2 \leq 1$$
- Ambos eventos ocurren al mismo tiempo.
- $$x_1 - x_2 = 0$$
- El evento x_1 solo puede ocurrir si ocurre el evento x_2.
- $$x_1 \leq x_2$$

Facility Location Problem

Hay un conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de posibles ubicaciones para plantas y se tiene el conjunto $M = \{1, \dots, m\}$ de clientes. Cada planta puede abrirse a un costo fijo c_j. Si el cliente i es atendido por la planta j, se tiene un costo de servicio h_{ij}. El objetivo es decidir que plantas abrir y a que planta asignar cada cliente a costo mínimo.

$$
\begin{array}{lcl}
 & Min \ \sum_j^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n h_{ij} y_{ij} & \\
s.a & \sum_{j=1}^n y_{ij} = 1 & \forall i \in M \\
 & y_{ij} - x_j \leq 0 & \forall i \in M, j \in N \\
 & x_j \in \{0,1\}, y_{ij} \in \{0,1\} &
\end{array}
$$

¿Cómo cambia si cada planta tiene una capacidad máxima b_j y y cada cliente tiene demanda d_i?

Implicancias

Suponga que un cierto producto A tiene un costo de $\$c_A$ por unidad, más un costo fijo de $\$f_A$ que se paga *solamente* si se produce el producto.

$$\begin{aligned} \text{Si } x_A = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{costo total } &= 0 \\ \text{Si } x_A > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{costo total } &= c \cdot x_A + f_A. \end{aligned}$$

Con una variable binaria d que valga 1 si se fabrica el producto A y 0 si no:

$$\begin{aligned} \text{Si } d = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x_A = 0 \quad (\text{ no se fabrica}) \\ \text{Si } x_A > 0 \quad &\Longrightarrow \quad d = 1 \quad (\text{ si se fabrica }) \\ \text{minimizar costo total} \quad &= \quad c_A \cdot x_A + d \cdot f_A. \end{aligned}$$

¿ cómo escribir estas restricciones en forma de ecuación lineal ?

implicancias

Sea M una cota superior de x. La restricción para d puede escribirse:

$$x_A - M \cdot d \leq 0$$

$$\begin{array}{lcll} \text{Si } d = 0 & \Longrightarrow & x_A = 0 & (\text{ no se fabrica}) \\ \text{Si } x_A > 0 & \Longrightarrow & d = 1 & (\text{ si se fabrica }) \end{array}$$

Para la otra dirección : $d = 1 \Longrightarrow x_A > 0$, usamos una cota inferior m:

$$x_A - m \cdot d \geq 0$$

(si $d = 1$ entonces x_A tendrá que ser al menos m).

Problema 3: coste fijo

Tres compañías de teléfonos ofrecen su servicio de larga distancia con Estados Unidos en las siguientes condiciones:

- La compañía C1 cobra una tarifa fija de 16 euros al mes, más 0,25 céntimos por minuto.
- La compañía C2 cobra 25 euros al mes de tarifa fija, pero reduce el coste por minuto a 0,21 céntimos.
- La compañía C3 ofrece una tarifa fija mensual de 18 euros y un coste por minuto de 0,22 céntimos.

Las compañías sólo cobran la tarifa fija si se realiza alguna llamada a través de su operador. Teniendo en cuenta que un usuario consume un promedio mensual de 200 minutos en llamadas a Estados Unidos, y que puede repartir dichas llamadas entre las tres compañías, ¿qué servicios debe utilizar para que la factura mensual de teléfono sea lo más económica posible?

variables de decisión:

- x_i = minutos mensuales consumidos con C_i
- variables auxiliares binarias d_i que cumplan:

$$\text{Si } x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad d_i = 0$$
$$\text{Si } x_i > 0 \quad \Longrightarrow \quad d_i = 1$$

Problema 3: coste fijo

Tres compañías de teléfonos ofrecen su servicio de larga distancia con Estados Unidos en las siguientes condiciones:

- La compañía C1 cobra una tarifa fija de 16 euros al mes, más 0,25 céntimos por minuto.
- La compañía C2 cobra 25 euros al mes de tarifa fija, pero reduce el coste por minuto a 0,21 céntimos.
- La compañía C3 ofrece una tarifa fija mensual de 18 euros y un coste por minuto de 0,22 céntimos.

Las compañías sólo cobran la tarifa fija si se realiza alguna llamada a través de su operador. Teniendo en cuenta que un usuario consume un promedio mensual de 200 minutos en llamadas a Estados Unidos, y que puede repartir dichas llamadas entre las tres compañías, ¿qué servicios debe utilizar para que la factura mensual de teléfono sea lo más económica posible?

Restricciones:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 200d_1 &\leq 0 \\
x_2 - 200d_2 &\leq 0 \\
x_3 - 200d_3 &\leq 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\
d_i &\in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Problema 3: coste fijo

Tres compañías de teléfonos ofrecen su servicio de larga distancia con Estados Unidos en las siguientes condiciones:

- La compañía C1 cobra una tarifa fija de 16 euros al mes, más 0,25 céntimos por minuto.
- La compañía C2 cobra 25 euros al mes de tarifa fija, pero reduce el coste por minuto a 0,21 céntimos.
- La compañía C3 ofrece una tarifa fija mensual de 18 euros y un coste por minuto de 0,22 céntimos.

Las compañías sólo cobran la tarifa fija si se realiza alguna llamada a través de su operador. Teniendo en cuenta que un usuario consume un promedio mensual de 200 minutos en llamadas a Estados Unidos, y que puede repartir dichas llamadas entre las tres compañías, ¿qué servicios debe utilizar para que la factura mensual de teléfono sea lo más económica posible?

Función objetivo:

$$\text{Min } z = 0,25x_1 + 0,21x_2 + 0,22x_3 + 16d_1 + 25d_2 + 18d_3$$